BAB
2

Polinomial

A. Polinomial dan Fungsi Polinomial

B. Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

C. Pembagian Polinomial dan Teorema Sisa

D. Faktor, Pembuat Nol, dan Identitas Polinomial

A. Polinomial dan Fungsi Polinomial

1. Pengertian Monomial dan Derajat Monomial

2. Pengertian Polinomial dan Derajat Polinomial

3. Fungsi Polinomial

4. Grafik Fungsi Polinomial

5. Karakteristik Grafik Fungsi Polinomial

1. Monomial dan Derajat Monomial

a. Monomial

Perhatikan pangkat pada bentuk aljabar berikut.

-8, x^2, $\frac{2}{x}$, x^{-2}, $1{,}6y^5$, $\sqrt[3]{x^2}$, dan $4x^2y^3$

1) Bentuk -8, x^2, $1{,}6y^5$, dan $4x^2y^3$ termasuk monomial.

2) Bentuk $\frac{2}{x}$, x^{-2}, $y^{\frac{1}{5}}$, dan $\sqrt[3]{x^2}$ tidak termasuk monomial.

b. Derajat Monomial

Suatu monomial mempunyai derajat monomial.

Contoh: 1) Derajat $6y^5$ adalah 5.

2) Derajat $5x^3y^1$ adalah 4 (jumlah pangkatnya).

Derajat monomial satu variabel adalah pangkat variabel tersebut.
Untuk koefisien $a \neq 0$, derajat ax^n adalah n.

Derajat monomial lebih dari satu variabel adalah jumlah pangkat semua variabel tersebut.
Untuk koefisien $a \neq 0$, derajat $ax^n y^m z^k$ adalah $(n + m + z)$.

2. Polinomial dan Derajat Polinomial

Perhatikan polinomial berderajat n dengan variabel x berikut.

$2 + 3x$, $2 + 3x + x^2$, $1 + \frac{5}{2}x^2 + 2x^4$.

Secara umum, polinomial berderajat n (n bilangan cacah) dengan variabel x dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a^0$$

Suatu polinomial mempunyai derajat polinomial.

Contoh: 1) Derajat $3 + 1{,}6y^5$ adalah 5.

2) Derajat $2x^3 + x^2 + 4x + 1$ adalah 3.

3) Derajat $4x^2y^3 + 3x^2 + z^2$ adalah 5.

Derajat suatu polinomial adalah derajat sukunya yang berderajat tertinggi.

Contoh Soal

Diketahui polinomial $p(x) = 8x^6 - 3x^4 - x^3 + 2x - 5$.
Tentukan:

a. derajat polinomial p(x) dan
b. suku-suku beserta koefisiennya.

Jawaban

$p(x) = 8x^6 - 3x^4 - x^3 + 2x - 5$

a. Polinomial p(x) mempunyai variabel x dengan pangkat tertinggi 6, maka derajat polinomial p(x) adalah 6.
b. Suku pertama $8x^6$ mempunyai koefisien 8.
   Suku kedua $-3x^4$ mempunyai koefisien –3.
   Suku ketiga $-x^3$ mempunyai koefisien –1.
   Suku keempat 2x mempunyai koefisien 2.
   Suku kelima –5 merupakan suku tetap.

Latihan Soal

Tentukan suku utama dan koefisien utama polinomial berikut.

1. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
2. $-3x^2 + 4x + 1$
3. $12 - \frac{1}{3}x$
4. $4x^6 + 5x^4 - 2x^6$
5. $x(3x^2 + 2) - 5x^3$

3. Fungsi Polinomial

Polinomial dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi. Bentuk umum fungsi polinomial berderajat n (n bilangan cacah) dalam variabel x sebagai berikut.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a^0$$

Pangkat tertinggi fungsi polinomial tersebut yaitu n. Suku fungsi polinomial yang memiliki derajat tertinggi yaitu $a_n x^n$ disebut dengan suku utama. Koefisien suku utama tersebut yaitu a_n dinamakan koefisien utama.

Contoh:

Polinomial $2 + 3x$ suku utamanya $3x$ dan koefisien suku utama 3.

Polinomial $2 - 3x - x^2$ suku utamanya $-x^2$ dan koefisien suku utama -1.

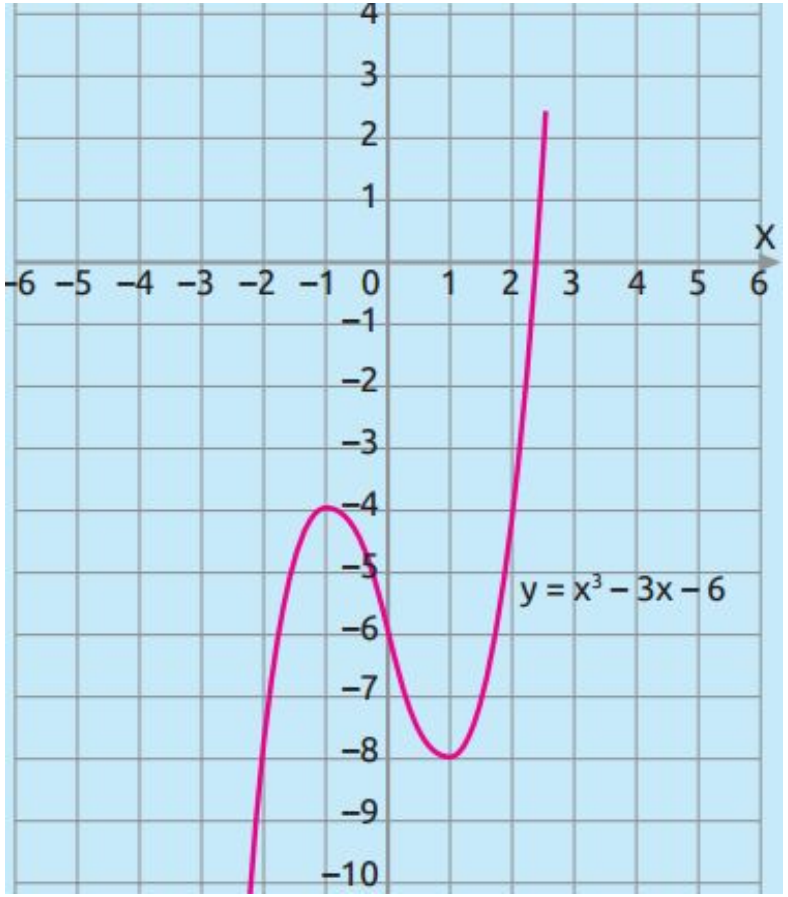
4. Grafik Fungsi Polinomial

Grafik fungsi polinomial dapat digambar dengan menentukan koordinat titik-titik yang dilalui grafik terlebih dahulu.

Diketahui polinomial $f(x) = x^3 - 3x - 6$.

Tabel titik bantu:

x	$y = f(x) = x^3 - 3x - 6$	(x, y)
–4	–58	(–4, –58)
–3	–24	(–3, –24)
–2	–8	(–2, –8)
–1	–4	(–1, –4)
0	–6	(0, –6)
1	–8	(1, –8)
2	–4	(2, –4)
3	12	(3, 12)
4	46	(4, 46)



Latihan Soal

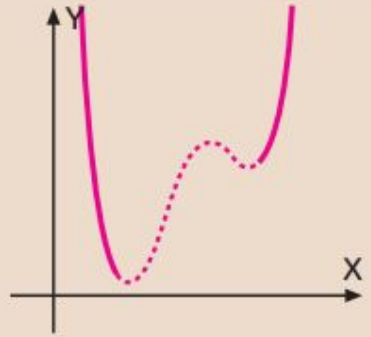
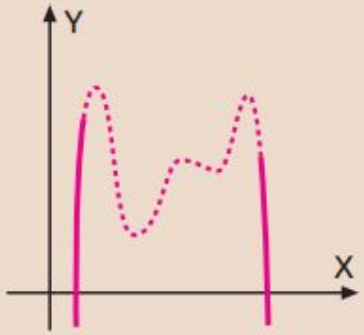
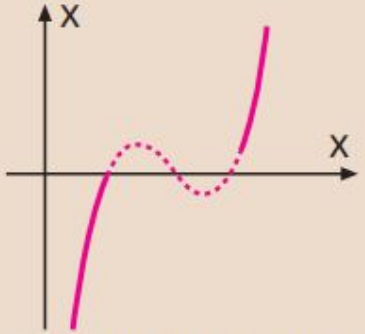
Gambarlah grafik fungsi polinomial berikut.

a. $f(x) = x + 4$
b. $f(x) = x^2 - 4$
c. $f(x) = x^3 - 3x - 1$
d. $f(x) = 2x^3 - 6x - 1$
e. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$
f. $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2$

5. Karakteristik Grafik Fungsi Polinomial

Suku utama fungsi polinomial menentukan perilaku ujung grafik fungsi polinomial.

Jika $a^n x^n$ dengan $n > 0$ adalah suku utama suatu polinomial, perilaku ujung grafiknya dapat dibedakan menjadi empat kategori berikut.

n	$a_n > 0$	$a_n < 0$
Genap	 Grafik mengarah ke kiri atas dan kanan atas.	 Grafik mengarah ke kiri bawah dan kanan bawah.
Ganjil	 Grafik mengarah ke kiri bawah dan kanan atas.	 Grafik mengarah ke kiri atas dan kanan bawah

Contoh Soal

Tentukan perilaku ujung grafik fungsi polinomial berikut.

a. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 100$.

b. $g(x) = -2x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$.

c. $h(x) = -3x^5 - 2x^4 + x^2 - 6$.

Jawaban

Fungsi	Suku Utama	Derajat	Tanda Koefisien Utama	Perilaku Ujung Grafik
$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 100$	$2x^4$	4 (genap)	Positif	↖, ↗
$g(x) = -2x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$	$-2x^4$	4 (genap)	Negatif	↙, ↘
$h(x) = -3x^5 - 2x^4 + x - 6$	$-3x^5$	5 (ganjil)	Negatif	↖, ↘

a. Ujung grafik fungsi $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 100$ menuju ke kiri atas dan kanan atas.

b. Ujung grafik fungsi $g(x) = -2x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$ menuju ke kiri bawah dan kanan bawah.

c. Ujung grafik fungsi $h(x) = -3x^5 - 2x^4 + x^2 - 6$ menuju ke kiri atas dan kanan bawah.

Latihan Soal

Tanpa menggambar grafiknya, tentukan perilaku ujung grafik fungsi polinomial berikut.

1. $f(x) = -x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x$
2. $g(x) = -x^7 - 2x^6 + x^5$
3. $h(x) = x^{11} - x^6 - x^5$

B. Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Polinomial

1. Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

2. Perkalian Polinomial

3. Sifat–Sifat Operasi Polinomial

4. Kesamaan Polinomial

1. Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada polinomial dilakukan dengan memerhatikan suku-suku yang sejenis. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada polinomial diselesaikan dengan memanfaatkan sifat komutatif, asosiatif, dan distributif.

Secara umum:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + (a_{n-2} + b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$p(x) - q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + (a_{n-2} - b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Contoh Soal

Diketahui $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$ dan $q(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 1$.
Tentukan $p(x) + q(x)$ dan $p(x) - q(x)$.

Jawaban

Diketahui $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$ dan $q(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 1$.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + x - 8) + (x^3 + 6x^2 - 2x + 1) \\ &= 3x^3 - 2x^2 + x - 8 + x^3 + 6x^2 + (-2x) + 1 \\ &= (3 + 1)x^3 + (-2 + 6)x^2 + (1 - 2)x + (-8 + 1) \\ &= 4x^3 + 4x^2 - x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + x - 8) - (x^3 + 6x^2 - 2x + 1) \\ &= 3x^3 - 2x^2 + x - 8 - x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \\ &= (3 - 1)x^3 + (-2 - 6)x^2 + (1 + 2)x + (-8 - 1) \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 3x - 9 \end{aligned}$$

Penjumlahan p(x) dan q(x):

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 + x - 8 \\ x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \\ \hline 4x^3 + 4x^2 - x - 7 \end{array} +$$

Pengurangan p(x) oleh q(x):

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 2x^2 + x - 8 \\ x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 3x - 9 \end{array} -$$

Latihan Soal

Diketahui pasangan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ berikut.

a. $p(x) = 6x^5 + 2x^3 + x^2 - x$ dan $q(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x - 5$

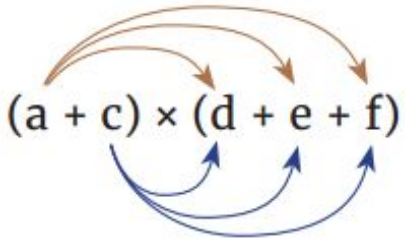
b. $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 7x + 6$ dan $q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 6$

c. $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x + 4$ dan $q(x) = 4x^4 - 4x^3 + 4x - 4$

Tentukan hasil $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$, dan $q(x) - p(x)$.

2. Perkalian Polinomial

Operasi perkalian polinomial dapat dilakukan dengan memanfaatkan sifat distributif perkalian.



Secara umum:

$$p(x) \times q(x)$$

$$= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0) \times (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

$$= a_n x^n (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$
$$+ a_{n-1} x^{n-1} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$
$$+ a_{n-2} x^{n-2} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$
$$+ \ldots + b_0 (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

Contoh Soal

Tentukan hasil perkalian setiap pasangan polinomial berikut.

a. $3x^3 - 4x + 2$ dan $x^2 - 5$

b. $x^2 - 4$ dan $x^2 + 2x - 4$

Jawaban

a. $(3x^3 - 4x + 2)(x^2 - 5)$

$= 3x^3(x^2 - 5) - 4x(x^2 - 5) + 2(x^2 - 5)$

$= 3x^5 - 15x^3 - 4x^3 + 20x + 2x^2 - 10$

$= 3x^5 - 19x^3 + 2x^2 + 20x - 10$

b. $(x^2 - 4)(x^2 + 2x - 4)$

$= x^2(x^2 + 2x - 4) - 4(x^2 + 2x - 4)$

$= x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x^2 - 8x + 16$

$= x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 8x + 16$

Latihan Soal

Diketahui pasangan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ berikut.

a. $p(x) = 6x^5 + 2x^3 + x^2 - x$ dan $q(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x - 5$

b. $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 7x + 6$ dan $q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 6$

c. $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x + 4$ dan $q(x) = 4x^4 - 4x^3 + 4x - 4$

Tentukan hasil $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$, dan $q(x) - p(x)$.

3. Sifat–Sifat Operasi Polinomial

Secara umum, jika polinomial $p(x)$ berderajat m dan polinomial $q(x)$ berderajat n, berlaku sifat–sifat operasi polinomial sebagai berikut.

a. Penjumlahan, pengurangan, dan perkalian polinomial bersifat tertutup. Artinya, hasil penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dua polinomial merupakan polinomial juga.
b. Derajat hasil penjumlahan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ adalah maksimum m dan n atau kurang dari itu.
c. Derajat hasil pengurangan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ adalah maksimum m dan n atau kurang dari itu.
d. Derajat hasil perkalian polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ adalah $m + n$.

4. Kesamaan Polinomial

Dua polinomial berderajat n dalam variabel x dikatakan sama atau identik jika koefisien-koefisien x yang berpangkat sama bernilai sama.

Misalkan p(x) dan q(x) polinomial sebagai berikut.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$

$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0$

p(x) sama dengan q(x) yaitu $p(x) \Leftrightarrow q(x)$

jika dan hanya jika $a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$; . . . ; $a_0 = b_0$.

Contoh Soal

Diketahui kesamaan berikut.

$3x^3 - 2x^2 + x - 6 \Leftrightarrow 3x^3 + ax^2 + (a - b)x - 6$

Tentukan nilai a dan b.

Jawaban

Dua polinomial berderajat sama dikatakan sama jika koefisien-koefisien x yang berpangkat sama bernilai sama.

$3x^3 - 2x^2 + x - 6 \Leftrightarrow 3x^3 + ax^2 + (a - b)x - 6$

Dari kesamaan polinomial di atas diperoleh:

$a = -2$

$a - b = 1$

$\Leftrightarrow \quad -2 - b = 1$

$\Leftrightarrow \quad -b = 1 + 2$

$\Leftrightarrow \quad -b = 3$

$\Leftrightarrow \quad b = -3$

Jadi, nilai $a = -2$ dan $b = -3$.

Latihan Soal

Diketahui $p(x) = (3x + 5)(x^2 - t)$ dan $q(x) = (4x^3 - 3x^2 + 15) - (x^3 - 8x^2 - 6x + 5)$. Nilai t yang memenuhi kesamaan polinomial $p(x) \equiv q(x)$ adalah . . . .

a. 10
b. 5
c. 2
d. −2
e. −5

C. Pembagian Polinomial dan Teorema Sisa

1. Pembagian Polinomial dengan Bersusun

2. Pembagian Polinomial dengan Metode Horner

3. Teorema Sisa

1. Pembagian Polinomial dengan Bersusun

Pembagian polinomial $2x^3 - 3x^2 - 11x + 2$ oleh $(x - 3)$ dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti pada pembagian bilangan.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x - 2 \\
\hline
x - 3 & 2x^3 - 3x^2 - 11x + 2 \\
 & 2x^3 - 6x^2 \quad - \\
\hline
 & \quad 3x^2 - 11x \\
 & \quad 3x^2 - 9x \quad - \\
\hline
 & \quad\quad -2x + 2 \\
 & \quad\quad -2x + 6 \quad - \\
\hline
 & \quad\quad\quad -4
\end{array}
$$

$$\underbrace{2x^3 - 3x^2 - 11x + 2}_{\text{Yang dibagi}} = \underbrace{(2x^2 + 3x - 2)}_{\text{Pembagi}}\underbrace{(x - 3)}_{\text{Hasil bagi}} + \underbrace{(-4)}_{\substack{\text{Sisa} \\ \text{pembagian}}}$$

Contoh Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian berikut dengan cara bersusun.

a. $2x^3 - x^2 + 7x - 8$ dibagi $x + 4$

b. $x^4 - 4x^2 + 6x - 12$ dibagi $x^2 - 4x + 1$

Jawaban

a. Pembagian polinomial $2x^3 - x^2 + 7x - 8$ oleh $x + 4$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 9x + 43 \quad \leftarrow \text{hasil bagi} \\
\hline
x + 4 & 2x^3 - x^2 + 7x - 8 \\
 & 2x^3 + 8x^2 \quad - \\
\hline
 & -9x^2 + 7x \\
 & -9x^2 - 36x \quad - \\
\hline
 & 43x - 8 \\
 & 43x + 172 \quad - \\
\hline
 & \text{sisa} \rightarrow \quad -180
\end{array}
$$

Jadi, hasil bagi $2x^2 - 9x + 43$ dan sisa -180.

b. Pembagian polinomial $x^4 - 4x^2 + 6x - 12$ oleh $x^2 - 4x + 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4x + 11 \quad \leftarrow \text{hasil bagi} \\
\hline
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 4x^2 + 6x - 12 \\
 & x^4 - 4x^3 + x^2 \quad - \\
\hline
 & 4x^3 - 5x^2 + 6x \\
 & 4x^3 - 16x^2 + 4x \quad - \\
\hline
 & 11x^2 - 2x - 12 \\
 & 11x^2 - 44x + 11 \quad - \\
\hline
 & \text{Sisa} \rightarrow \quad 42x - 33
\end{array}
$$

Jadi, hasil bagi $x^2 + 4x + 11$ dan sisa $42x - 33$.

Latihan Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa bagi polinomial berikut menggunakan cara pembagian bersusun.

a. $2x^3 - x^2 + 7x - 8$ dibagi $x + 4$

b. $x^4 - 4x^2 + 6x - 12$ dibagi $x^2 - 4x + 3$

2. Pembagian Polinomial dengan Metode Horner

Metode Horner merupakan penyederhanaan pembagian bersusun. Metode Horner dapat digunakan jika pembaginya berbentuk x – k.

Bentuk $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 2)$ dibagi oleh $(x - 3)$.

Metode Horner:

3	2	−3	−11	2
		6	9	−6
	2	3	−2	−4

+

Pembagian bersusun:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x - 2 \\
\hline
x - 3 & 2x^3 - 3x^2 - 11x + 2 \\
 & 2x^3 - 6x^2 \quad - \\
\hline
 & \quad 3x^2 - 11x \\
 & \quad 3x^2 - 9x \quad - \\
\hline
 & \quad\quad -2x + 2 \\
 & \quad\quad -2x + 6 \quad - \\
\hline
 & \quad\quad\quad -4
\end{array}
$$

Metode Horner digunakan jika pembaginya berbentuk x – k. Jika pembagi berbentuk (ax + b) maka pembagi diubah ke bentuk (x – k).

Bentuk $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x)$ dibagi oleh $(2x - 1)$.



$f(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^3 + 4x^2 + 6x + 8) + 4$

$= (x - \frac{1}{2}) \cdot 2(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + 4$

$= (2x - 1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + 4$

Jadi, $h(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

$s(x) = 4$

Latihan Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian polinomial oleh polinomial berderajat satu berikut menggunakan cara skema Horner.

a. $x^4 + 6x^2 - 5x - 6$ dibagi $x + 4$

b. $2x^3 + 9x^2 - 2$ dibagi $2x - 3$

3. Teorema Sisa

a. Teorema Sisa 1

Jika polinomial f(x) dibagi dengan (x − k), maka sisanya sama dengan f(k).

b. Teorema Sisa 2

Jika polinomial f(x) dibagi dengan ax + b, maka sisanya sama dengan $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

c. Teorema Sisa 3

Jika polinomial f(x) dibagi dengan (x − a)(x − b), maka sisanya s(x) = px + q dengan f(a) = pa + q dan f(b) = pb + q.

d. Teorema Sisa 4

Jika polinomial f(x) dibagi dengan (x − a)(x − b), maka sisanya

$$s(x) = \frac{x-b}{a-b} \times f(a) + \frac{x-a}{b-a} \times f(b)$$

Diketahui polinomial f(x) dibagi oleh (x + 2) dan (x − 4) berturut−turut diperoleh sisa 8 dan −4. Tentukan sisa pembagian polinomial f(x) oleh $x^2 - 2x - 8$.

Contoh Soal

Diketahui polinomial f(x) dibagi oleh (x + 2) dan (x − 4) berturut−turut diperoleh sisa 8 dan −4. Tentukan sisa pembagian polinomial f(x) oleh $x^2 - 2x - 8$.

Jawaban

Polinomial f(x) dibagi oleh (x + 2) sisa 8:

$f(x) = h_1(x)(x + 2) + (8)$

$f(-2) = 8$

Polinomial f(x) dibagi oleh (x − 4) sisa (−4):

$f(x) = h_2(x)(x - 4) + (-4)$

$f(4) = -4$

Diperoleh $f(-2) = 8$ dan $f(4) = -4$.

Polinomial f(x) dibagi oleh $(x^2 - 2x - 8)$.

Pembagi $(x^2 - 2x - 8)$ berderajat 2 maka sisa berderajat 1.

Misalkan sisa pembagian f(x) oleh $(x^2 - 2x - 8)$ adalah $(ax + b)$:

$f(x) = h_3(x)(x^2 - 2x - 8) + (ax + b)$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = h_3(x)(x + 2)(x - 4) + (ax + b)$

$f(-2) = s(-2) = a(-2) + b = -2a + b$

$f(4) = s(4) = a(4) + b = 4a + b$

Oleh karena $f(-2) = 8$ dan $f(4) = -4$ maka:

$f(-2) = s(-2) \Leftrightarrow 8 = -2a + b$

$\Leftrightarrow b = 8 + 2a \quad \ldots (i)$

$f(4) = s(4) \Leftrightarrow -4 = 4a + b$

$\Leftrightarrow b = -4 - 4a \quad \ldots (ii)$

Eliminasi b dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh:

$8 + 2a = -4 - 4a$

$\Leftrightarrow 6a = -12$

$\Leftrightarrow a = -2$

Substitusikan $a = -2$ ke dalam persamaan (i).

$b = 8 + 2 \times (-2) = 8 - 4 = 4$

Diperoleh sisa pembagian:

$s(x) = ax + b = -2x + 4$

Cara lain:

f(x) dibagi (x + 2) sisanya 8, berarti

$s_1 = f(-2) = 8.$

f(x) dibagi (x − 4) sisanya −4, berarti

$s_2 = f(4) = -4.$

Sisa pembagian f(x) oleh $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$:

$$s(x) = \frac{x-b}{a-b} \times f(a) + \frac{x-a}{b-a} \times f(b)$$

$$= \frac{x-4}{-2-4} \times 8 + \frac{x+2}{4+2} \times (-4)$$

$$= \frac{x-4}{-6} \times 8 + \frac{x+2}{-6} \times 4$$

$$= \frac{8x-32+4x+8}{-6}$$

$$= -2x + 4$$

Latihan Soal

Sisa pembagian polinomial $p(x)$ oleh $(x^2 - 1)$ adalah $4x - 3$, sedangkan sisa pembagian $p(x)$ oleh $(x + 4)$ adalah 2. Sisa pembagian $p(x)$ oleh $(x^2 + 5x + 4)$ adalah . . . .

a. $2x + 5$
b. $2x - 5$
c. $3x + 10$
d. $-3x - 10$
e. $-3x + 10$

D. Faktor, Pembuat Nol, dan Identitas Polinomial

1. Teorema Faktor
2. Pembuat Nol Fungsi Polinomial
3. Faktorisasi Penuh Polinomial dan Pembuat Nol Kompleks
4. Identitas Polinomial

1. Teorema Faktor

Teorema Faktor:
Diketahui f(x) suatu polinomial dan k konstanta bilangan real.
(x − k) merupakan faktor f(x) jika dan hanya jika f(k) = 0.

Diketahui polinomial $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ akan dibagi oleh $(x - 1)$.

Menentukan hasil bagi dan sisa pembagian f(x) oleh $(x - 1)$:

1	1	−1	−4	4
		1	0	−4
	1	0	−4	0 ← Sisa 0

Hasil bagi $(x^2 - 4)$ dan sisa 0

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

$= (x^2 - 4)(x - 1) + 0$

$= (x + 2)(x - 2)(x - 1) + 0$

$(x + 2)$ merupakan faktor $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ karena $f(-2) = 0$.

$(x - 2)$ merupakan faktor $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ karena $f(2) = 0$.

$(x - 1)$ merupakan faktor $(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ karena $f(1) = 0$.

Contoh Soal

Tentukan faktor-faktor dari polinomial $x^3 - x^2 - 9x + 9$.

Jawaban

Koefisien x^3 yaitu 1 dan konstanta 9. Faktor 9 yaitu ±1, ±3, ±9.

Calon akarnya yaitu ±1, ±3, ±9.

Misalkan dipilih x = 1. Apakah (x – 1) faktor $f_2(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$?

Gunakan metode Horner.

1	1	–1	–9	9
		1	0	–9
	1	0	–9	0 ← Sisa 0

Hasil bagi yaitu $(x^2 - 9)$ dan sisa 0.

$f_2(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

$= (x^2 - 9)(x - 1) + 0$

$= (x + 3)(x - 3)(x - 1) + 0$

Faktor $(x^3 - x^2 - 9x + 9)$ adalah $(x + 3)$, $(x - 3)$, dan $(x - 1)$.

Latihan Soal

Tentukan faktor fungsi polinomial berikut.

1. Fungsi $f_1(x) = x^2 - 7x + 6$.
2. Fungsi $f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
3. Fungsi $f_3(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$.

2. Pembuat Nol Fungsi Polinomial

Pembuat nol fungsi ditentukan dengan menyelesaikan persamaan polinomial $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow a\,(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = c_1 \text{ atau } x = c_2 \text{ atau } \ldots \text{ atau } x = c_n$$

Tentukan pembuat nol fungsi $f(x) = -2x3 - 4x2 + 10x + 12$.

Contoh Soal

Tentukan pembuat nol fungsi $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$.

Jawaban

$f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 10x + 12$ dibagi oleh $(x + 1)$ dengan Metode Horner di samping.

-1	-2	-4	10	12
		2	2	-12
	-2	-2	12	0

$$-2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 = (x + 1)(-2x^2 - 2x + 12)$$

Pembuat nol:

$$(x+1)(-2x^2-2x+12) = 0$$

$$-2(x+1)(x^2+x-6) = 0$$

$$-2(x+1)(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+1=0 \text{ atau } x+3=0 \text{ atau } x-2=0$$

$$x=-1 \text{ atau } x=-3 \text{ atau } x=2$$

Latihan Soal

Salah satu nilai pembuat nol fungsi $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 5x + k$ adalah $x = 1$. Nilai pembuat nol fungsi yang lain adalah . . . .

a. $x = 3$
b. $x = 2$
c. $x = -2$
d. $x = -4$
e. $x = -6$

3. Faktorisasi Penuh Polinomial dan Pembuat Nol Kompleks

$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$ merupakan bentuk faktorisasi penuh polinomial P(x).

Kadang tidak semua nilai c bilangan real.

Jika $P(x)$ adalah polinomial berderajat n dengan $n \geq 1$, maka ada bilangan-bilangan kompleks $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (dengan $a \neq 0$) sedemikian sehingga

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

Contoh Soal

Tentukan semua pembuat nol kompleks $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, lalu faktorkan polinomial tersebut secara penuh.

Jawaban

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Gunakan metode Horner untuk memeriksa $(x - 1)$ merupakan faktor.

1	1	−1	1	−1
		1	0	0
	1	0	1	0

Oleh karena sisa 0, maka $(x - 1)$ merupakan faktor.

$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$

Pembuat nol:

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 1)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 0$ atau $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = -1$ atau $x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$ atau $x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm i$ atau $x = 1$

Jadi, pembuat nol fungsi yaitu $-i$, i, atau 1.

Faktorisasi penuh:

$f(x) = (x + i)(x - i)(x - 1)$

Latihan Soal

Faktorisasi penuh polinomial $x^4 - 2x^2 - 8$ adalah . . . .

a. $(x + i)(x - i)(x + 2)(x - 4)$
b. $(x + i)(x - i)(x - 2)(x - 4)$
c. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + 4)(x - 2)$
d. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x - 2)(x - 4)$
e. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + 2)(x - 2)$

4. Identitas Polinomial

Berikut ini beberapa identitas polinomial yang sering digunakan untuk memfaktorkan polinomial.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Contoh:

$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x(2) + 2^2)$

$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2)^2 - 2^3$

$= (x - 2)^3$

Contoh Soal

Faktorkan $(3x - 1)^2 - 25$.

Jawaban

$$
\begin{aligned}
(3x-1)^2-25 &= (3x-1)^2-5^2 \\
&= \left[(3x-1)+5\right]\left[(3x-1)-5\right] \\
&= \left[3x-1+5\right]\left[3x-1-5\right] \\
&= (3x+4)(3x-6)
\end{aligned}
$$

Latihan Soal

Faktorisasi penuh polinomial $x^4 - 2x^2 - 8$ adalah . . . .

a. $(x + i)(x - i)(x + 2)(x - 4)$
b. $(x + i)(x - i)(x - 2)(x - 4)$
c. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + 4)(x - 2)$
d. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x - 2)(x - 4)$
e. $(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + 2)(x - 2)$