APLIKASI TURUNAN FUNGSI

Modul 1: Persamaan Garis Singgung & Garis Normal

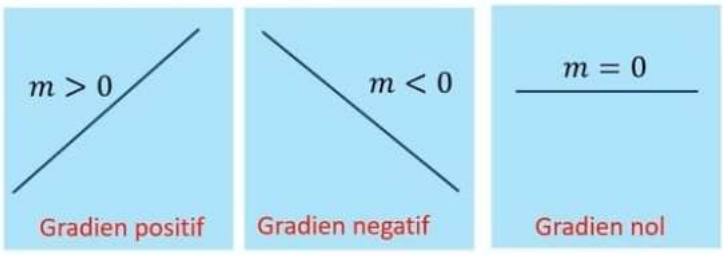
Tujuan Pembelajaran:

Siswa dapat menentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva fungsi trigonometri di titik tertentu.

A. Rangkuman Materi

Konsep kuncinya adalah: **Turunan pertama adalah gradien (m).**

1. **Gradien Garis Singgung** (m_s)



Jika m adalah gradien garis singgung suatu fungsi $f(x)$ maka :

$m = f'(x)$

Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ tentukanlah :

1. Gradien garis singgung fungsi tersebut.
2. Gradien garis singgung fungsi $f(x)$ dititik $A(2, -2)$

Jawab:

1. Gradien garis singgung fungsi $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

   $m = f'(x)$

   $= -2x + 3$

2. Gradien garis singgung fungsi $f(x)$ dititik $A(2, -2)$

   $m = -2x + 3$

   Gradien di titik $(2, -2)$

   $m = -2(2) + 3$

   $= -4 + 3$

   $= -1$

2. **Persamaan Garis Singgung**

   Rumus garis lurus yang melalui titik (x_1, y_1)dengan gradien m:

   $y - y_1 = m_s(x - x_1)$

3. **Persamaan Garis Normal**

   Garis normal adalah garis yang **tegak lurus** terhadap garis singgung di titik yang sama. Hubungan gradiennya:

   $m_n = -\frac{1}{m_s}$

   Persamaannya:

   $y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$

B. Contoh Soal & Pembahasan

Soal 1:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 4x + 4$ di titik $A(3,1)$

Langkah 1: Tentukan Titik Singgung (x_1, y_1)

Kita sudah punya $x_1 = 3$ dan $y_1 = 1$

Langkah 2: Tentukan Gradien (m_s)

$m_s = f'(x)$

$m_s = 2x + 4$

Gradien garis singgung di titik $(3,1)$

$m_s = 2(3) - 4$

$= 6 - 4$

$= 2$

Langkah 3: Susun Persamaan Garis

Gunakan rumus $y - y_1 = m_s(x - x_1)$

$y - y_1 = m_s(x - x_1)$

$y - 1 = 2(x - 3)$

$y - 1 = 2x - 6$

$y - 2x - 1 + 6 = 0$

$y - 2x + 5 = 0$

$-2x + y + 5 = 0$

$2x - y - 5 = 0$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $2x - y - 5 = 0$

Soal 2:

Tentukan persamaan garis normal kurva $f(x) = x^2 - 4x + 4$ di titik $A(3,1)$

Langkah 1: Tentukan Titik Singgung (x_1, y_1)

Kita sudah punya $x_1 = 3$ dan $y_1 = 1$

Langkah 2: Tentukan Gradien (m_s)

$m_s = f'(x)$

$m_s = 2x + 4$

Gradien garis singgung di titik $(3,1)$

$m_s = 2(3) - 4$

$= 6 - 4$

$= 2$

$m_n = -\frac{1}{m_s}$

$m_n = -\frac{1}{2}$

Langkah 3: Susun Persamaan Garis

Gunakan rumus $y - y_1 = m_s(x - x_1)$

$y - y_1 = m_n(x - x_1)$

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$2y - 2 = x + 3$

$x + 2y - 2 - 3 = 0$

$x + 2y - 5 = 0$

Jadi, persamaan garis normalnya adalah $x + 2y - 5 = 0$

Soal 3:

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = \sin 2x$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{6}$

Pembahasan Langkah demi Langkah:

Langkah 1: Tentukan Titik Singgung (x_1, y_1)

Kita sudah punya $x_1 = \frac{\pi}{6}$ Cari nilai y_1 dengan memasukkan x_1 ke fungsi awal.

$$y_1 = \sin\left(2.\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin(60^o)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

→ Titik singgung: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Langkah 2: Tentukan Gradien (m_s)

Turunkan fungsi $y = \sin 2x$ terlebih dahulu.

$$y_1 = 2\cos 2x$$

Masukkan nilai $x = \frac{\pi}{6}$ ke dalam turunan:

$$m_s = 2\cos\left(2.\frac{\pi}{6}\right)$$

$$m_s = 2\cos(60^o)$$

$$m_s = 2.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$m_s = 1$$

Langkah 3: Susun Persamaan Garis

Gunakan rumus $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

C. Soal Latihan (Untuk Siswa)

Soal 1 (Pemahaman Gradien)

- Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 3\cos x$ pada saat $x = \frac{\pi}{2}$

Soal 2 (Aplikasi Penuh)

- Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 6x + 1$ di titik $P(1, -4)$.
- Persamaan garis singgung kurva $y = \frac{2x^3-1}{x}$ di titik dengan absis 1, memotong sumbu Y pada titik
- Diketahui kurva $f(x) = cos\ 2x$. tentukan persamaan garis singgung kurva tersebut di titik $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Modul 2: Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

Tujuan Pembelajaran:

Siswa dapat menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi dalam interval tertutup menggunakan uji turunan kedua.

A. Rangkuman Materi

Untuk mencari puncak gunung (maksimum) atau dasar lembah (minimum), kita menggunakan langkah berikut:

1. **Syarat Stasioner:** Cari kapan $f'(x) = 0$. Ini adalah kandidat titik puncak/lembah.
2. **Uji Turunan Kedua** (f''): Untuk memastikan apakah itu maksimum atau minimum.
   - Jika $f''(x) < 0$ (Negatif/Cemberut ☹) → Titik **Maksimum**.
   - Jika $f''(x) > 0$ (Positif/Senyum 🙂) → Titik **Minimum**.
3. **Nilai Fungsi:** Masukkan nilai x tersebut ke fungsi awal $f(x)$ untuk mendapat nilai maksimum/minimumnya.

B. Contoh Soal & Pembahasan

Soal 1:

⇨ Fungsi $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ didefinisikan pada inverval $-2 \leq x \leq 1$. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi tersebut

Jawaban

Diketahui $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ sehingga $f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$

Diperoleh titik stasioner berikut.

$f'(x) = 0$

$12x^2 + 6x - 6 = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$(2x - 1)(x + 1) = 0$

$2x - 1 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ atau $x = -1$

Nilai fungsi f pada titik stasioner sebagai berikut

$$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1$$
$$= -4 + 3 + 6 + 1$$
$$= 6$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 3 + 1$$
$$= -\frac{3}{4}$$

Fungsi didefinisikan pada interval tertutup sehingga nilai fungsi pada ujung-unung interval perlu diperiksa

Nilai fungsi pada ujung-ujung interval sehingga berikut

$$f(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 1$$
$$= -32 + 12 + 12 + 1$$
$$= -7$$

$$f(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 6(1) + 1$$
$$= 4 + 3 - 6 + 1$$
$$= 2$$

Disimpulkan nilai minimum fungsi -7 dan nilai maksimum 6

Soal 2:

- ⇨ Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ pada interval $0 < x < 2\pi$

Pembahasan Langkah demi Langkah:

Langkah 1: Cari Titik Stasioner $(f'(x) = 0)$

$f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

Syarat stasioner:

$\cos x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \rightarrow \tan x = 1$$

Dalam interval $0 < x < 2\pi$, atau $\tan x = 1$ terjadi di kuadran I dan III:

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{4}(45^o)$$

$$\rightarrow x = \frac{5\pi}{4}(225^o)$$

Langkah 2: Uji Jenisnya dengan Turunan Kedua $(f''(x))$

Turunkan lagi $f'(x)$ untuk dapat $f"(x)$:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f"(x) = -\sin\ x - \cos\ x$$

- **Uji untuk $x = \frac{\pi}{4}$:**

$$f"\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\ (45^o) - \cos\ (45^o)$$

Karena hasilnya **Negatif** (< 0), maka ini adalah **MAKSIMUM**.

- **Uji untuk $x = \frac{5\pi}{4}$:**

$$f"\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\ (225^o) - \cos\ (225^o)$$

(Ingat: di Kuadran III, sin & cos negatif)

$$f"\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

Karena hasilnya **Positif** (> 0), maka ini adalah **MINIMUM**.

Langkah 3: Hitung Nilai Maksimum dan Minimum

Masukkan nilai x ke fungsi awal $f(x)$:

- **Nilai Maksimum:**

  $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^o + \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

- **Nilai Minimum:**

  $$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin 225^o + \cos 225^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

Kesimpulan: Nilai maksimum adalah $\sqrt{2}$ dan nilai minimum adalah $-\sqrt{2}$.

C. Soal Latihan (Untuk Siswa)

Soal 1 :

Diketahui $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 15$. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi untuk interval $0 \leq x < 6$.

Soal 2 :

Diketahui fungsi $y = 3 \sin 2x$.

a. Tentukan nilai maksimum fungsi tersebut. (Tanpa turunan pun bisa, ingat sifat grafik sinus!)

b. Buktikan jawabanmu menggunakan turunan pertama.

Modul 3: Penerapan Turunan Fungsi Trigonometri

Indikator: Siswa dapat menentukan interval fungsi naik dan fungsi turun menggunakan turunan pertama.

Contoh Soal (Berdasarkan Latihan Hal. 98)

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{\pi}{3}\sin 2x$ untuk interval $0 < x < 2\pi$.

Tentukan interval di mana fungsi tersebut naik dan di mana fungsi tersebut turun!

Pembahasan Langkah demi Langkah:

Langkah 1: Tentukan Turunan Pertama $f'(x)$

Untuk melihat pergerakan grafik (naik/turun), kita perlu mencari gradiennya menggunakan turunan pertama.

$$f(x) = \frac{\pi}{3}\sin 2x$$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} . 2\cos 2x$$

$$f(x) = \frac{2\pi}{3}\cos 2x$$

Langkah 2: Tentukan Titik Pembuat Nol (Titik Stasioner)

Fungsi batas antara naik dan turun adalah saat gradiennya nol ($f'(x) = 0$).

$$f(x) = \frac{2\pi}{3}\cos 2x$$

$$\cos 2x = 0$$

Dalam interval $0 < x < 2\pi$ (atau $0 < 2x < 4\pi$), nilai $2x$ yang memenuhi $cos\ 2x\ =\ 0$ adalah:

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

Sehingga nilai x adalah:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Langkah 3: Uji Tanda pada Garis Bilangan

Kita bagi interval 0 sampai 2π dengan titik-titik di atas dan uji salah satu sudut (misal $x = \frac{\pi}{6}$ atau 30^o):

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}\cos(2 . 30^o) = \frac{2\pi}{3} = \cos(60^o) = (+)$ (Positif/Naik) 📈

Maka polanya akan selang-seling:

1. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ → Positif (**Naik**) 📈
2. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ → Negatif (**Turun**) 📉
3. $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ → Positif (**Naik**) 📈
4. $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ → Negatif (**Turun**) 📉
5. $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ →Positif (**Naik**) 📈

Kesimpulan:

- **Fungsi Naik** pada interval: $0 < x < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$
- **Fungsi Turun** pada interval: $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

Modul 4: Visualisasi & Latihan Mandiri

Tujuan: Siswa dapat mensketsa grafik fungsi berdasarkan interval naik/turun dan menyelesaikan masalah serupa secara mandiri.

A. Visualisasi Grafik (Sketsa Kurva)

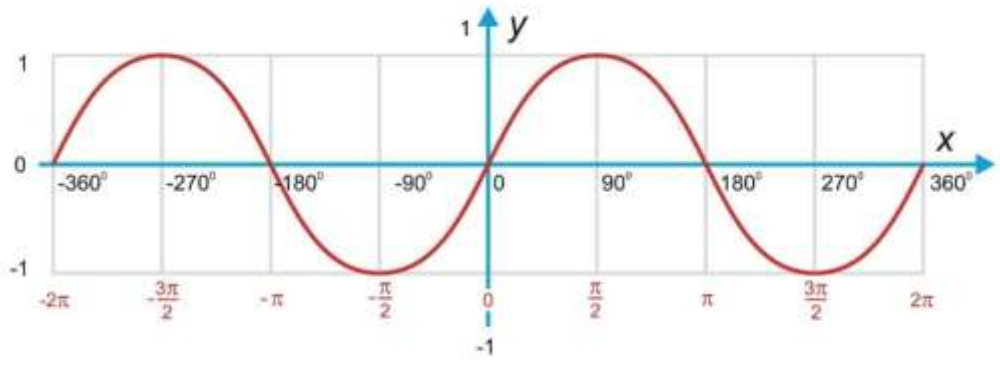
Setelah menghitung interval naik dan turun pada Modul 3, ajak siswa untuk memplot titik-titik penting (Titik Stasioner) ke dalam koordinat Kartesius.

Data dari Modul 3:

- **Fungsi:** $f(x) = \frac{\pi}{3}\sin 2x$
- **Titik Maksimum (Puncak):** Saat $x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}$
- **Titik Minimum (Lembah):** Saat $x = \frac{3\pi}{4} \rightarrow y = -\frac{\pi}{3}$
- **Titik Potong Sumbu X:** $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$

Instruksi untuk Siswa:

1. Gambar sumbu *X* (sudut) dan sumbu *Y* (nilai fungsi).
2. Tandai titik puncak $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ dan titik lembah $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan garis lengkung halus (seperti gelombang).
    - Tunjukkan bahwa garis **naik** dari 0 ke puncak.
    - Lalu **turun** menuju lembah.
    - Dan **naik** lagi setelah lembah.



B. Soal Latihan (Untuk Dikerjakan Siswa)

Berikan soal dengan tingkat kesulitan yang bertingkat agar siswa bisa berlatih langkah demi langkah.

Soal 1 (Pemahaman Dasar) Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut:

a. $y = 3\sin 4x$
b. $y = 2\cos 3x$

Soal 2 (Aplikasi Interval) Diketahui fungsi $g(x) = \cos 2x$ pada interval $0^o < x < 180^o$.

a. Tentukan pembuat nol dari turunan pertama ($g'(x) = 0$).
b. Tentukan interval di mana fungsi $g(x)$ naik.

Modul 5: Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD)

Topik: Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri

Nama: .....

Kelas: .....

Tujuan Pembelajaran

Melalui pengerjaan LKPD ini, kalian diharapkan dapat menentukan interval di mana suatu fungsi naik atau turun menggunakan turunan pertama.

Masalah Utama

Diketahui sebuah fungsi trigonometri sebagai berikut:

$f(x) = cos\ 2x$

Untuk interval $0^o \leq x \leq 180^o$.

Tentukan kapan grafik fungsi tersebut **naik** dan kapan **turun** dengan melengkapi langkah-langkah di bawah ini!

Langkah 1: Menentukan Turunan Pertama

Ingat bahwa gradien garis singgung ditentukan oleh $f'(x)$

Turunan dari $\cos(ax)$ adalah $-a\sin(ax)$.

Maka, turunan pertama dari $f(x) = \cos 2x$ adalah:

$f'(x) = \cdots \quad \sin(\quad \ldots. \quad)$

Langkah 2: Menentukan Titik Stasioner (Pembuat Nol)

Fungsi batas antara naik dan turun terjadi saat $f'(x) = 0$.

$\ldots\ldots \quad \sin(2x) = 0$

$\sin(2x) = 0$

Dalam interval $0^o \leq x \leq 180^o$ (atau $0^o \leq 2x \leq 360^o$), nilai sinus bernilai 0 pada sudut :

$2x = 0^o, \ldots\ldots, 360^o$

Maka nilai x adalah:

$x = 0^o, \ldots\ldots, 180^o$

Langkah 3: Uji Tanda pada Garis Bilangan

Kita peroleh dua interval utama di antara batas-batas tersebut. Mari kita uji nilai $f(x)$ di setiap interval.

A. Interval I ($0^o < x < 90^o$)

Ambil titik uji, misal $x = 30^o$

Substitusi ke $f'(x)$:

$f'(30^o) = -2\sin(2.30^o)$

$f'(30^o) = -2\sin(60^o)$

$f'(30^o) = -2(\ldots\ldots\ldots)$

Hasilnya bernilai **(Positif / Negatif)**? .....

(Artinya grafik sedang .....)

B. Interval II ($90^o < x < 180^o$)

Ambil titik uji, misal $x = 120^o$.

Substitusi ke $f'(x)$:

$f'(120^o) = -2\sin(2.\ldots\ldots\ldots)$

$f'(120^o) = -2\sin(240^o)$

(Ingat : $\sin 240^o$ ada di kuadran III, nilainya negatif)

$f'(120^o) = -2(\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Hasilnya bernilai **(Positif / Negatif)**? .....

(Artinya grafik sedang .....)

Kesimpulan Akhir

Berdasarkan uji tanda di atas:

1. Fungsi $f(x)$ **naik** pada interval: .....
2. Fungsi $f(x)$ **turun** pada interval: .....