
Bab 1
Geometri Analitik

- Apakah kalian mengetahui persamaan irisan kerucut?
- Apakah kalian mengetahui perbedaan dari persamaan lingkaran, parabola, elips, dan parabola?
- Apakah kalian mengetahui cara menentukan kedudukan titik atau garis terhadap irisan kerucut?

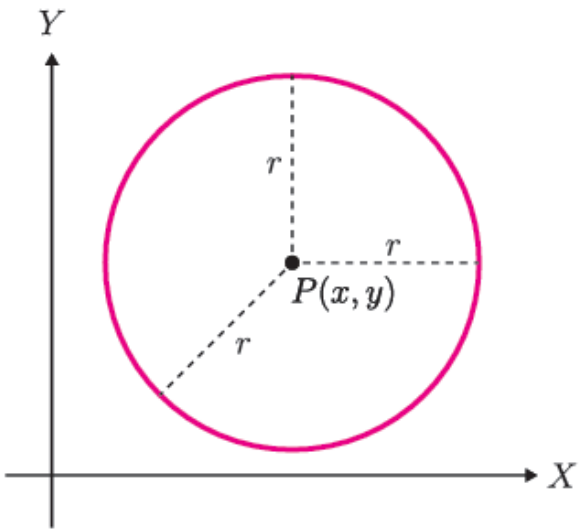
1. Definisi Lingkaran

Ayo Mengomunikasikan

Lingkaran adalah kurva tertutup dan semua titik pada garis tersebut memiliki jarak yang sama dengan titik pusat. Garis melengkung pada definisi ini dapat diartikan dengan kurva tertutup, sehingga lingkaran ini dipandang sebagai suatu bangun pada bidang datar atau pada dimensi dua.

Selain itu, beberapa ahli mengatakan bahwa lingkaran adalah lintasan suatu titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu dan terletak suatu bidang datar. Dari pernyataan ini, kata kunci terkait dengan pengertian lingkaran adalah jarak yang selalu sama dan titik tertentu. Jarak yang sama pada definisi ini dapat diartikan dengan jari-jari, sedangkan titik tertentu dapat diartikan dengan titik pusat.

Pada Gambar 1.8 dapat dilihat bahwa titik tertentu atau pusat lingkaran pada $P(x,y)$, sedangkan jarak yang sama atau jari-jari adalah r. Dari definisi lingkaran tersebut dan dibantu dengan Gambar 1.8, dapatkah kalian mengungkapkan definisi lingkaran menggunakan kalimat sendiri?



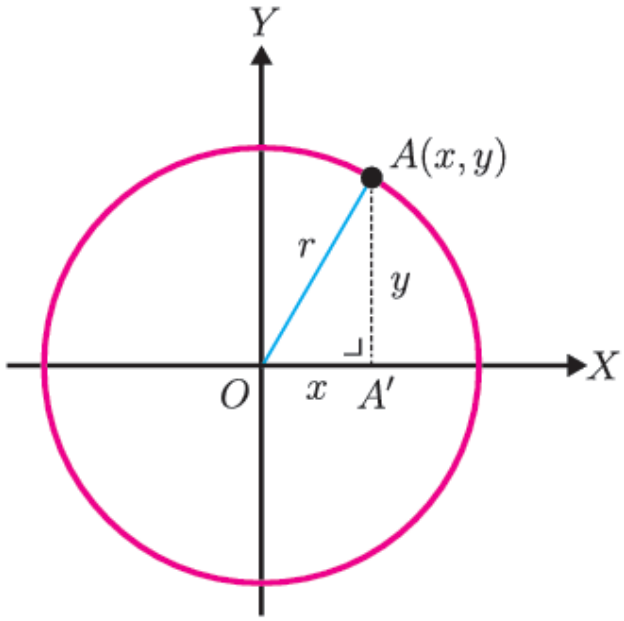
Gambar 1.8. Lingkaran dengan Titik Pusat $P(x,y)$ dan Jari-Jari r.

2. Persamaan Lingkaran

a. Persamaan Lingkaran Dengan Pusat $O(0,0)$

Titik O adalah titik asal koordinat kartesian. Seperti pada Gambar 1.9, lingkaran berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r. Andaikan $A(x,y)$ adalah sembarang titik yang terletak di lingkaran. Titik A tersebut diproyeksikan pada sumbu X, sehingga diperoleh A' pada koordinat $(x,0)$.

Dari segitiga $\Delta OA'A$ yang merupakan segitiga siku-siku, diperoleh bahwa $OA^2 = OA'^2 + A'A^2$. Telah diketahui bahwa panjang OA adalah jari-jari atau r, panjang OA' adalah x, dan panjang AA' adalah y, sehingga $OA^2 = (OA)^2 + (A'A)^2$ dapat dinyatakan dengan $r^2 = x^2 + y^2$. Karena A adalah sembarang titik yang diambil pada lingkaran, maka persamaan $r^2 = x^2 + y^2$. dapat digeneralisasi untuk semua titik pada lingkaran. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa persamaan lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.



Gambar 1.9. Lingkaran dengan Pusat O (0,0) dan Jari-Jari r.

Contoh Soal 1.1

Jika suatu lingkaran berpusat di O dan jari-jari $r = 6$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal 1.1 diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat O dan jari-jari $r = 6$, sehingga persamaan lingkaran dapat ditulis menjadi $x^2+y^2 = r^2$ dan dapat dinyatakan dengan $x^2+y^2 = 36$.



Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Soal Terbimbing 1.1 dan 1.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan ".....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.1

Jika suatu lingkaran memiliki titik pusat O dan diameter lingkaran $d = 4\sqrt{3}$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Petunjuk

Diameter adalah tali busur terpanjang yang melalui titik pusat. Panjang diameter merupakan dua kali dari jari-jarinya, dan diameter ini membagi lingkaran dua bagian yang sama luasnya

Alternatif Penyelesaian:

Pada soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat O dan diameter d = ... Untuk menentukan jari-jari lingkaran, terlebih dahulu harus membagi diameter menjadi dua bagian, sehingga $r = \frac{diameter}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} =$ ..... Selanjutnya, substitusikan jari-jari r yang sudah diperoleh pada persamaan lingkaran $x^2+y^2 = r^2$, sehingga lingkaran berpusat O dengan diameter $4\sqrt{3}$ memiliki persamaan .....

Latihan Soal Terbimbing 1.2

Adi diberikan tugas oleh guru matematika untuk menggambar sebuah lingkaran melalui titik $T\,(6,-8)$. Selain itu, lingkaran tersebut memiliki pusat lingkaran pada titik $O(0,0)$. Karena Adi memiliki rasa ingin tahu yang tinggi, Adi berencana untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut. Dapatkah kalian membantu Adi untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut?

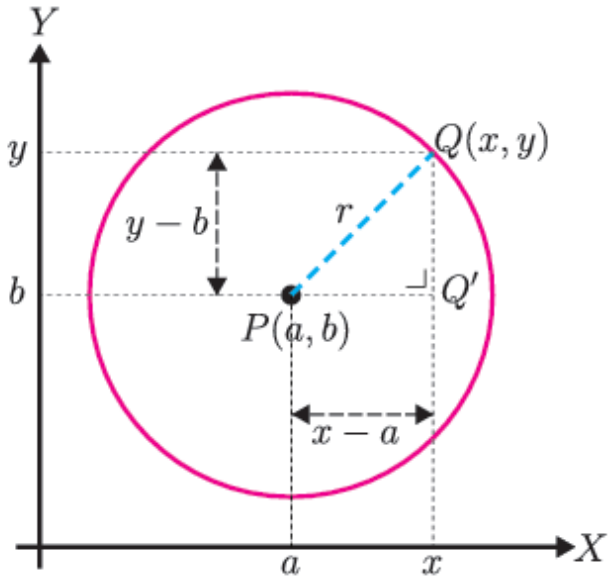
Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa pusat lingkaran berada ..... Untuk menentukan jari-jari lingkaran di titik $O\,(0,0)$, kalian dapat menggunakan titik $T\,(6,-8)$ dan Teorema *Pythagoras*, sehingga $r^2 = x^2+y^2 = 6^2 + (.....)^2 =$ .....

Jadi lingkaran tersebut memiliki persamaan .....

b. Persamaan Lingkaran dengan Pusat $P(a,b)$

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari cara menentukan suatu persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ berjari-jari r. Pada sistem koordinat kartesius, sangat dimungkinkan menggambar suatu lingkaran dengan pusat lingkaran yang tidak berada pada titik $O(0,0)$ atau pusat koordinat. Untuk menjawab hal ini, kalian perhatikan Gambar 1.10, lingkaran tersebut memiliki jari-jari r dan pusat lingkaran pada $P(a,b)$.



Gambar 1.10. Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$ dan Jari-Jari r.

Dengan menggunakan langkah yang sama seperti pada persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$, kalian perlu memperhatikan segitiga $\Delta PQ'Q$. Dengan menggunakan Teorema *Phytagoras*, maka diperoleh bahwa $PQ^2 = (Q'P)^2+(Q'Q)^2$. Telah diketahui bahwa PQ adalah jari-jari atau r, $Q'P$ adalah $(x-a)$, dan PQ adalah $(y-b)$, sehingga $\Delta PQ^2 = (Q'P)^2 + (Q'Q)^2$ dapat dinyatakan dengan

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Persamaan ini merupakan persamaan lingkaran berpusat di $P(a,b)$ dengan jari-jari r dalam bentuk baku.

Contoh soal 1.2

Diketahui lingkaran berpusat $P(1,2)$ dan jari-jari $r = 6$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(1,2)$, hal ini berarti bahwa nilai $a = 1$ dan nilai $b = 2$. Selain itu, diketahui pula jari-jari lingkaran adalah 6, sehingga persamaan lingkaran adalah $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$.

Contoh soal 1.3

Jika pusat suatu lingkaran berada pada titik $P(-5,2)$ dan diameter $d = 6$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(-5,2)$, hal ini berarti bahwa nilai $a = -5$, dan $b = 2$. Selain itu diameter lingkaran sebesar 6, sehingga jari-jarinya sebesar 3. Dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ diperoleh bahwa persamaan lingkaran melalui titik $P(-5,2)$ dengan jari-jari $r = 3$ adalah $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$.

c. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Kalian memiliki dua bentuk persamaan lingkaran, yaitu persamaan lingkaran pada pusat $O(0,0)$ dengan jari-jari r dan persamaan lingkaran berpusat di titik $P(a,b)$ dengan jari-jari r. Pada persamaan lingkaran $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$ dapat dijabarkan menjadi $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 36$ atau dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$.

Persamaan lingkaran $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$ identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$. Sesuai dengan Contoh Soal 1.2, persamaan lingkaran ini memiliki pusat $P(2,4)$ dan jari-jari $r = 6$.

Begitu pula pada persamaan lingkaran $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$, identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$. Kedua persamaan lingkaran ini memiliki pusat $P(-5,2)$ dan jari-jari $r = 3$.

Berdasarkan dua contoh penulisan persamaan lingkaran berbentuk $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$, dapat simpulkan bahwa persamaan lingkaran dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, di mana A, B, dan C adalah bilangan real. Bentuk persamaan ini disebut dengan **bentuk umum persamaan lingkaran**.

Contoh soal 1.4

Tentukan persamaan umum lingkaran apabila lingkaran memiliki jari jari $r = 3$, dan berpusat pada $P(-1,2)$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran bentuk bakunya adalah $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Apabila persamaan ini dijabarkan menjadi $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Jadi, bentuk persamaan umum lingkaran dengan pusat $P(-1,2)$ dan jari-jari $r = 3$ adalah $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Latihan Soal Terbimbing 1.4

Jika lingkaran memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$, dan berpusat di titik $P(2,-4)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada Latihan Soal Terbimbing 1.3 telah diperoleh bahwa bentuk baku persamaan lingkaran adalah ..... Apabila persamaan ini dijabarkan maka diperoleh persamaan umum lingkaran .....

Contoh soal 1.5

Jika titik pusat suatu lingkaran adalah (2,3) dan memiliki diameter 8 cm. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

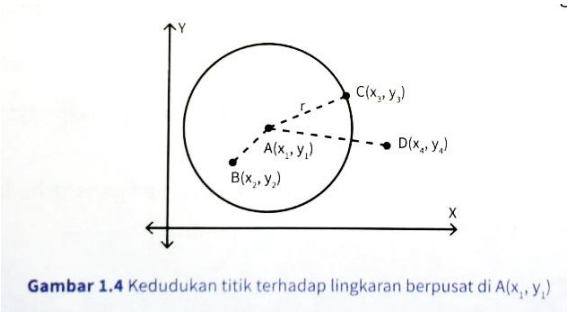
Terima Kasih

2. Kedudukan Titik, Garis, dan Lingkaran terhadap Lingkaran

Pada bagian sebelumnya kamu telah mempelajari bahwa lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Hal ini menunjukkan bahwa apabila terdapat titik yang memenuhi suatu persamaan lingkaran, berarti dapat dikatakan titik tersebut berkedudukan pada lingkaran. Lantas seperti apa titik yang tidak berkedudukan pada lingkaran?

A. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Perhatikan gambar lingkaran berikut beserta beberapa titik yang berkedudukan atau tidak berkedudukan pada lingkaran. Lingkaran berpusat di $A(x_1, y_1)$ dengan panjang jari-jari = r. Titik B di dalam lingkaran, titik C pada lingkaran, dan titik D di luar lingkaran.



Gambar 1.4 Kedudukan titik terhadap lingkaran berpusat di A(x_1, y_1)

Kedudukan titik B,C, dan D pada lingkaran di atas dapat dijelaskan sebagai berikut.

- Titik $B(x_2,y_2)$ tidak berkedudukan pada lingkaran. Lebih tepatnya titik $B(x_2,y_2)$ berada di dalam lingkaran, yang ditandai dengan panjang garis AB kurang dari r atau dapat disimbolkan dengan $|\overline{AB}|$ < r.
- Titik $C(x_3,y_3)$ berkedudukan pada lingkaran atau berada pada lingkaran, yang ditandai dengan panjang garis AC sama dengan r atau dapat disimbolkan dengan $|\overline{AC}|$ = r.
- Titik $D(x_4,y_4)$ tidak berkedudukan pada lingkaran. Lebih tepatnya titik $D(x_4,y_4)$ berada di luar lingkaran, yang ditandai dengan panjang garis AD lebih dari r atau dapat disimbolkan dengan $|\overline{AD}|$ > r.

Jika diketahui persamaan lingkaran, kedudukan titik $A(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran dapat ditentukan dengan mensubstitusikan nilai x = x_1 dan y = y_1 ke dalam persamaan lingkaran. Dari hasil substitusi tersebut dapat ditentukan kedudukan titik A berdasarkan daftar berikut.

Persamaan Lingkaran	Kedudukan Titik $A(x_1, y_1)$		
	Di Dalam Lingkaran	Pada Lingkaran	Di Luar Lingkaran
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1^2 + y_1^2 < r^2$	$x_1^2 + y_1^2 = r^2$	$x_1^2 + y_1^2 > r^2$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 < r^2$	$(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = r^2$	$(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 > r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	${x_1}^2 + {y_1}^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$	${x_1}^2 + {y_1}^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$	${x_1}^2 + {y_1}^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

Contoh Soal:

Tentukanlah kedudukan titik (5,2) terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$

Alternatif Penyelesaian

ada persamaan $x^2 + y^2 = 25$ diketahui nilai $r^2 = 25$. Untuk menentukan kedudukan titik (5,2) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, kita bisa langsung mensubstitusikan titik tersebut ke dalam persamaan lingkarannya.

Sehingga (x, y) = (5, 2) diperoleh:

$x^2 + y^2 = 25$

$5^2 + 2^2 = 25$

$25 + 4 = 25$

$29 > 25$

Karena 29 > 25. Jadi, titik (5,2) terletak di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$

B. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Kedudukan garis terhadap lingkaran dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan garis tersebut ke dalam persamaan lingkaran sehingga diperoleh persamaan kuadrat. Banyak titik potong garis dengan lingkaran adalah banyak penyelesaian persamaan kuadrat tersebut. Jadi banyak titik potong garis dan lingkaran dapat dilihat dari nilai diskriminan persamaan kuadrat, yaitu D = b^2 - 4ac.

1. Jika D > 0, garis memotong lingkaran di dua titik.
2. Jika D = 0, garis memotong lingkaran di satu titik atau garis menyinggung lingkaran.
3. Jika D < 0, garis tidak memotong lingkaran.

Contoh Soal:

Selidikilah setiap kedudukan garis berikut terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$

a. garis $g: y = 3x - 2$.
b. garis $h: y = 2x$.
c. garis $l: y + 3x - 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk kasus a. garis $g: y = 3x - 2$.

Akan diselidiki garis $g : y = 3x - 2$ terhadap lingkaran L.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0.$$

$$x^2 + (3x - 2)^2 - 6x - 8(3x - 2) + 21 = 0.$$

$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 6x - 24x + 16 + 21 = 0.$$

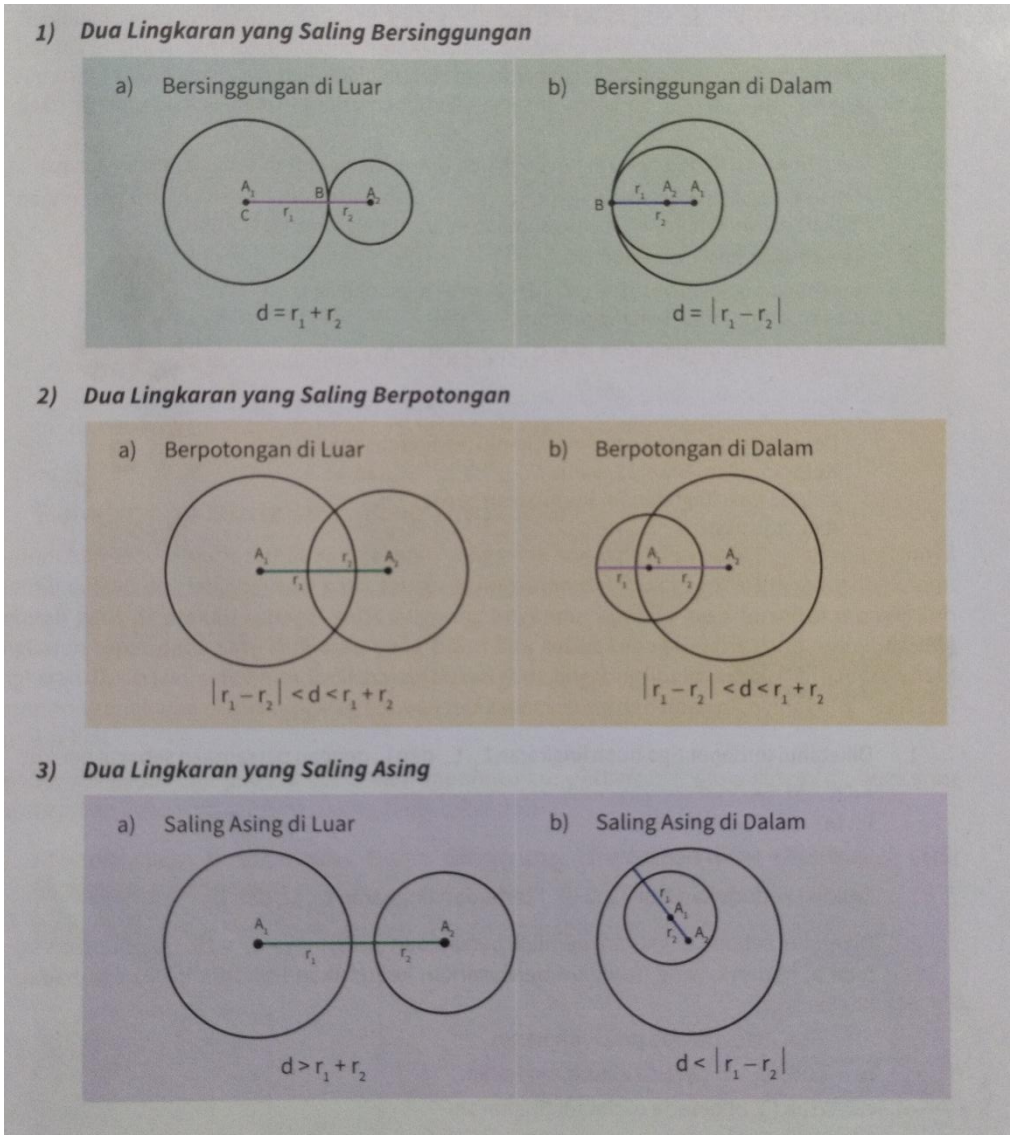
$$10x^2 - 42x + 41 = 0.$$

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4(10)(41) = 124$. Karena diperoleh nilai diskriminan $D > 0$, maka garis $g: y = 3x - 2$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$.

C. Kedudukan Lingkaran terhadap Lingkaran

Pada bagian sebelumnya, kamu telah mempelajari kedudukan sebuah titik dan garis terhadap lingkaran. Pada bagian ini, kamu akan mempelajari kedudukan sebuah lingkaran terhadap lingkaran lainnya.

Perhatikan gambar beserta penjelasannya berikut.



Lembar Kerja Murid

Nama Anggota Kelompok
1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

1. Selidiki apakah titik $A(3,-3)$ berada pada terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$!

   Alternatif Penyelesaian:

   .....

   Jadi titik $A(3,-3)$ ....., terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ karena .....

2. Diketahui titik $A(2,3)$, $B(2,8)$, $C(8,5)$, dan $D(5,3)$, tentukan kedudukan titik tersebut terhadap lingkaran:

   a. $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

   b. $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

3. Selidikilah setiap kedudukan garis berikut terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$

   a. garis $g: y = 3x - 2$.
   b. garis $h: y = 2x$.
   c. garis $l: y + 3x - 2 = 0$.

Untuk kasus b. garis $h: y = 2x$.

Kalian selidiki terlebih dahulu letak garis $h: y = 2x$ terhadap lingkaran L.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0.$$

$$x^2 + (.....)^2 - 6x - 8(.....) + 21 = 0.$$

.....

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac =$ .....

Karena diperoleh nilai diskriminan ....., maka .....

Untuk kasus c. garis $l: y + 3x - 2 = 0$.

Akan diselidiki kedudukan garis $l: y + 3x - 2 = 0$ terhadap lingkaran L, maka $l: y = 2 - 3x = 0$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

.....

Mengecek Kedudukan Dua Lingkaran Menggunakan Diskriminan

"Dua buah lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x + 16y + 44 = 0$ dan $L_2 \equiv (x-6)^2 + (y+8)^2 = 16$ saling bersinggungan."

Untuk menunjukkan kebenaran pernyataan tersebut, kamu dapat menggunakan diskriminan. Kerjakan bersama teman sekelompokmu dengan mengikuti langkah-langkah berikut ini.

1. Mengeliminasi kedua persamaan lingkaran untuk memperoleh sebuah persamaan garis.
2. Mensubstitusi ke persamaan garis yang diperoleh pada poin 1 ke salah satu persamaan lingkaran untuk memperoleh persamaan kuadrat dalam variable x atau y.
3. Menentukan nilai diskriminan D.
4. Menentukan apakah nilai D > 0,D = 0,atau D < 0 untuk menunjukkan dua lingkaran saling bersinggungan.
5. Menyimpulkan berdasarkan nilai D yang diperoleh.

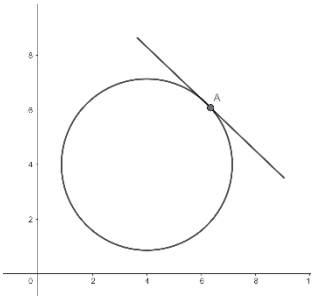
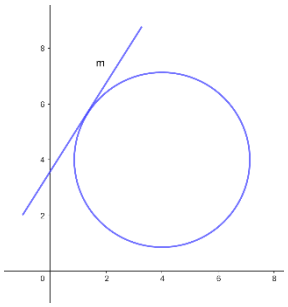
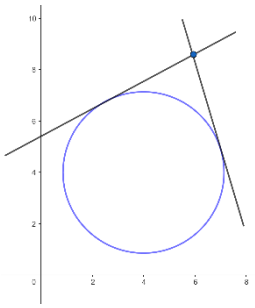
Pembuktian :

.....

3. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Kedudukan sebuah garis terhadap lingkaran dapat dibagi menjadi 3 keadaan, yaitu garis tersebut memotong lingkaran pada 2 titik, memotong lingkaran pada 1 titik saja (menyinggung), dan tidak memotong lingkaran sama sekali. Lingkaran dapat memiliki garis singgung yang tak terhingga. Persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan jika titik singgungnya diketahui.

Garis Singgung Lingkaran

Garis singgung melalui titik pada lingkaran	Diketahui gradien garis singgung	Garis singgung melalui titik diluar lingkaran
		

a. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Titik Pada Lingkaran

Misal titik (x_1, y_1) terletak pada lingkaran

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1.x + y_1.y = r^2$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1.x + y_1.y + \frac{1}{2}A(x+x_1) + \frac{1}{2}B(y+y_1) + C = 0$

Contoh 1:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ melalui titik $P(2,3)$

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $P(2,3)$ pada persamaan lingkaran.

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ *(Titik P terletak pada lingkaran)*

PGS Lingkaran : $x_1.x + y_1.y = r^2$

$2x + 3y = 13$

$2x + 3y - 13 = 0$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ melalui titik $P(2,3)$ adalah $2x + 3y - 13 = 0$

Contoh 2:

Tentukan persamaan garis singgung di titik $P(-2,1)$
pada lingkaran $(x-2)^2+(y+4)^2=41$

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $P(-2,1)$ pada persamaan lingkaran.

$(-2-2)^2+(1+4)^2=16+25=41$ *(Titik P terletak pada lingkaran)*

PGS Lingkaran : $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

$$(x_1-2)(x-2)+(y_1+4)(y+4)=41$$
$$(-2-2)(x-2)+(1+4)(y+4)=41$$
$$-4(x-2)+5(y+4)=41$$
$$-4x+8+5y+20=41$$
$$-4x+5y-13=0$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $(x-2)^2+(y+4)^2=41$ melalui titik $P(-2,1)$ adalah $-4x+5y-13=0$

Contoh 3:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik $A(-2,-1)$ pada lingkaran $x^2+y^2+12x-6y+13=0$

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $P(-2,-1)$ pada persamaan lingkaran.

$(-2)^2+(-1)^2+12(-2)-6(-1)+13=0$

$=4+1-24+6+13$

$=0$ *(Titik P terletak pada lingkaran)*

PGS Lingkaran : $x_1.x+y_1.y+\frac{1}{2}A(x+x_1)+\frac{1}{2}B(y+y_1)+C=0$

$$-2x-1y+\frac{1}{2}.12(x-2)+\frac{1}{2}(-6)(y-1)+13=0$$
$$-2x-y+6(x-2)-3(y-1)+13=0$$
$$-2x-y+6x-12-3y+3+13=0$$
$$4x-4y+4=0$$
$$x-y+1=0$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+12x-6y+13=0$ melalui titik $P(-2,-1)$ adalah $x-y+1=0$

Soal Latihan :

1. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=10$ melalui titik $(-3,1)$ adalah,
2. Persamaan garis singgung lingkaran $(x+2)^2+(y-1)^2=26$ di titik $(-3,6)$ adalah.
3. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+4x-2y-21=0$ di titik $(-3,6)$ adalah.

b. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Jika Diketahui Gradien Garis Singgung

Misal (a, b) adalah titik pusat lingkaran, r adalah jari-jari lingkaran, dan m gradien garis singgung lingkaran

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

- Gradien (m)
  $y = ax + b$ maka $m = a$
  $ax + by = c$ maka $m = -\frac{a}{b}$
- Garis melalui dua titik maka $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Dua garis sejajar maka, $m_1 = m_2$
- Dua garis saling tegak lurus maka, $m_1 . m_2 = -1$

Contoh 1:

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 64 = 0$ dengan gradien 4 adalah ....

Penyelesaian,

Diketahui $m = 4$

$r^2 = 64$

$r = \sqrt{64} = 8$

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$y = 4x \pm 8\sqrt{4^2 + 1}$

$y = 4x \pm 8\sqrt{17}$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 64 = 0$ adalah

$y = 4x + 8\sqrt{17}$

atau

$y = 4x - 8\sqrt{17}$

Contoh 2:

Jika sebuah garis melalui titik $A(-2,3)$ dan titik $B(2,0)$ dan menyinggung lingkaran yang berpusat di titik $(3,1)$ dan berjari-jari 4, maka persamaan garis tersebut adalah.

Penyelesaian,

Diketahui $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{2-(-2)} = -\frac{3}{4}$

$r = 4$

Titik pusat $(3,1)$

$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3) \pm 4\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1}$

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3) \pm 4\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}}$

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3) \pm 4\sqrt{\frac{25}{16}}$

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3) \pm 4\left(\frac{5}{4}\right)$

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 3) \pm 5$ dikali 4

$4y - 4 = -3(x - 3) \pm 20$

$4y - 4 = -3x + 9 \pm 20$

$3x + 4y - 4 - 9 \pm 20 = 0$

$3x + 4y - 13 \pm 20 = 0$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $3x + 4y + 7 = 0$ atau $3x + 4y - 33 = 0$

Contoh 3:

Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$ adalah

Penyelesaian,

Diketahui $a = 4, b = -3$ dan $r = \sqrt{40}$

$x + 3y + 5 = 0$ maka, $m_1 = -\frac{1}{3}$

Syarat tegak lurus $m_1 . m_2 = -1$

$-\frac{1}{3} . m_2 = -1$

$\frac{m_2}{3} = 1$

$m_{2=3}$

$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$y + 3 = 3(x - 4) \pm \sqrt{40}.\sqrt{9 + 1}$

$y + 3 = 3x - 12 \pm \sqrt{400}$

$y + 3 = 3x - 12 \pm 20$

$y = 3x - 12 - 3 \pm 20$

$y = 3x - 15 \pm 20$

Jadi, Persamaan garis singgung lingkaran $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 40$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$ adalah $y = 3x + 5$ atau $y = 3x - 35$

Contoh 4:

Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $2x - y + 7 = 0$ adalah

Penyelesaian,

Diketahui $a = 3, b = 1$ dan $r = \sqrt{5}$

$m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{(-1)} = 2$

Dua garis sejajar maka, $m_1 = m_2$ maka, $m_2 = 2$

$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$y - 1 = 2(x - 3) \pm \sqrt{5}.\sqrt{4 + 1}$

$y - 1 = 2x - 6 \pm 5$

$y = 2x - 5 \pm 5$

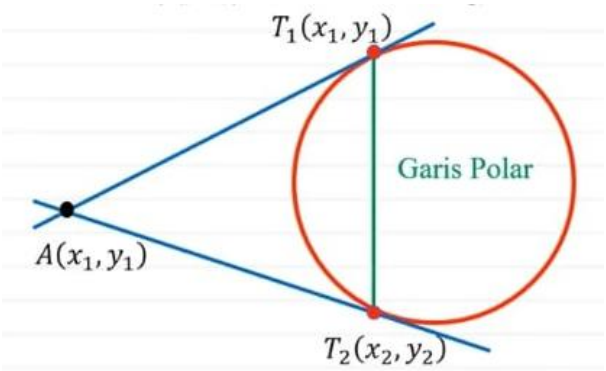
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $2x - y + 7 = 0$ adalah $y = 2x$ atau $y = 2x - 10$

Soal Latihan :

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 25 = 0$ dengan gradien $m = 2$.
2. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang sejajar garis $3x + y + 6 = 0$ adalah.
3. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x+6)^2 + (y-8)^2 = 10$ yang tegak lurus garis $x + 3y = 24$.

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Titik Di Luar Lingkaran

Misal titik $A(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran



Akan terbentuk 2 PGSL

Cara menentukan PGS Melalui titik di luar lingkaran

1. Menentukan persamaan garis polar
2. Subtitusikan garis polar ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh T_1 dan T_2
3. Tentukan PGSL dengan T_1 dan T_2 sebagai titik singgungnya.

Persamaan Garis Polar dan Garis Singgung Lingkaran Dengan Titik Singgung T_1 dan T_2

Misal titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1.x + y_1.y = r^2$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1.x + y_1.y + \frac{1}{2}A(x+x_1) + \frac{1}{2}B(y+y_1) + C = 0$

Contoh 1:

Tentukan PGSL $x^2 + y^2 = 13$ yang ditarik dari titik $A(1, -5)$ yang terletak di luar lingkaran!

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $A(1, -5)$ pada persamaan lingkaran.

$1^2 + (-5)^2 = 1 + 25 = 26 \ > \ 13$ *(Titik A terletak di luar lingkaran)*

Tentukan persamaan garis polar

$x_1.x + y_1.y = r^2$

$x - 5y = 13$

$x = 5y + 13$

Subtitusikan x ke persamaan lingkaran

$x^2 + y^2 = 13$

$(5y + 13)^2 + y^2 = 13$

$25y^2 + 130y + 169 + y^2 = 13$

$26y^2 + 130y + 156 = 0$

$y^2 + 5y + 6 = 0$ maka, $(y + 2)(y + 3) = 0$

$y = -2$ atau $y = -3$

Subtitusi y ke x untuk mendapatkan titik singgung

$y = -2 \Rightarrow\!\!\!\rangle\ x = 5(-2) + 13 = 3 \Rightarrow\!\!\!\rangle\ (3, -2)$

$y = -3 \Rightarrow\!\!\!\rangle\ x = 5(-3) + 13 = -2 \Rightarrow\!\!\!\rangle\ (-2, -3)$

Tentukan PGSL dengan titik singgung (x_1, y_1)

$x_1.x + y_1.y = r^2$

PGS 1 dengan titik singgung $(3, -2)$

$3x + (-2)y = 13$

$3x - 2y = 13$

PGS 2 dengan titik singgung $(-2, -3)$

$(-2)x + (-3)y = 13$

$2x + 3y = -13$

Jadi PGS Lingkarannya adalah $3x - 2y = 13$ dan $2x + 3y = -13$

Contoh 2:

Tentukan PGSL $(x + 1)^2 + y^2 = 20$ yang ditarik dari titik $B(1,6)$ yang terletak di luar lingkaran!

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $B(1,6)$ pada persamaan lingkaran.

$(1 + 1)^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37 > 20$ *(Titik B terletak di luar lingkaran)*

Tentukan persamaan garis polar

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

$(1 + 1)(x + 1) + (6 - 0)(y - 0) = 20$

$2x + 2 + 6y = 20$

$2x + 6y = 20 - 2$

$2x + 6y = 18 \Rightarrow\!\!\!\rangle\ x = 9 - 3y$

Subtitusikan x ke persamaan lingkaran

$(x+1)^2 + y^2 = 20$

$(9 - 3y + 1)^2 + y^2 = 20$

$(10 - 3y)^2 + y^2 = 20$

$100 - 60y + 9y^2 + y^2 = 20$

$10y^2 - 60y + 80 = 0$

$y^2 - 6y + 8 = 0$ maka, $(y-2)(y-4) = 0$

$y = 2$ atau $y = 4$

Subtitusi y ke x untuk mendapatkan titik singgung

$y = 2 \Rightarrow x = 9 - 3(2) = 3 \Rightarrow (3,2)$

$y = 4 \Rightarrow x = 9 - 3(4) = -3 \Rightarrow (-3,4)$

Tentukan PGSL dengan titik singgung (x_1, y_1)

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

PGS 1 dengan titik singgung $(3,2)$

$(3+1)(x+1) + (2-0)(y-0) = 20$

$4x + 4 + 2y = 20$

$4x + 2y = 16$

$2x + y = 8$

PGS 2 dengan titik singgung $(-3,4)$

$(-3+1)(x+1) + (4-0)(y-0) = 20$

$-2x - 2 + 4y = 20$

$-2x + 4y = 22$

$-x + 2y = 11$

Jadi PGS Lingkarannya adalah $2x + y = 8$ dan $-x + 2y = 11$

Soal Latihan:

Tentukan PGSL $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ yang ditarik dari titik $C(3,8)$ diluar lingkaran

Penyelesaian,

Subtitusikan titik $C(3,8)$ pada persamaan lingkaran.

$3^2 + 8^2 - 2(3) - 4(8) - 15 = 0$

..... *(Titik B terletak ..... lingkaran)*

Titik pusat $(1,2)$

$r = \sqrt{20}$

Ubah bentuk persamaan ke bentuk baku

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - \cdots)^2 + (y - \cdots)^2 = 20$

Tentukan persamaan garis polar

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

$(\ldots - 1)(x - \cdots) + (\ldots - 2)(y - \cdots) = 20$

$\ldots x - 2 + \cdots y - \cdots = 20$

.....

.....

Subtitusikan x ke persamaan lingkaran

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

$(\ldots\ldots\ldots\ldots - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$

.....

.....

$y = \cdots$ atau $y = \cdots$

Subtitusi y ke x untuk mendapatkan titik singgung

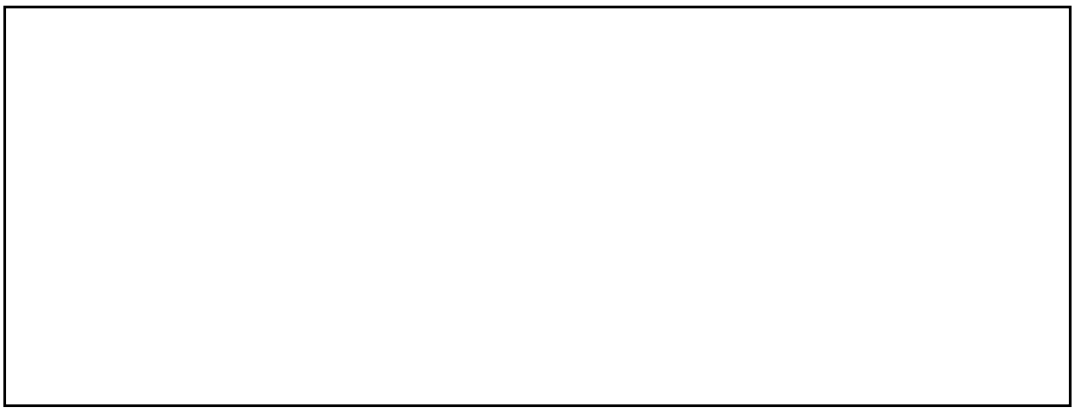
$y = 4 \Rightarrow$ .....

$y = 6 \Rightarrow$ .....

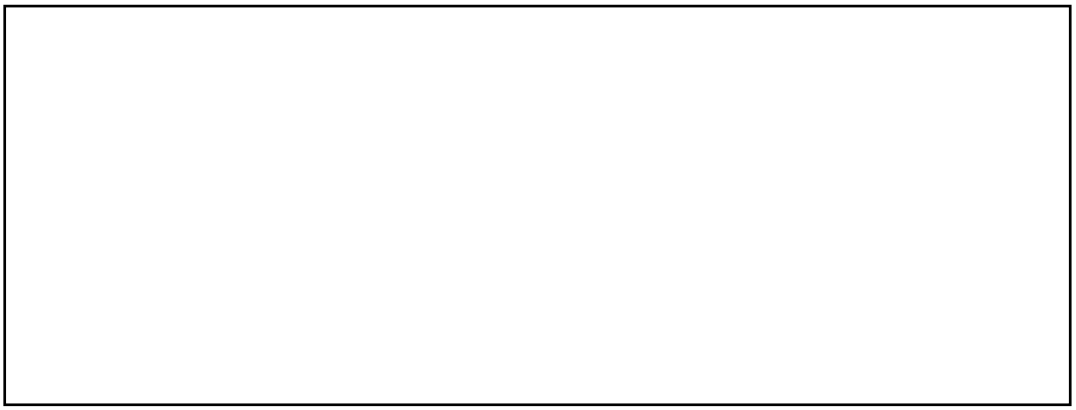
Tentukan PGSL dengan titik singgung (x_1, y_1)

.....

PGS 1 dengan titik singgung $(5,4)$



PGS 2 dengan titik singgung $(-1,6)$



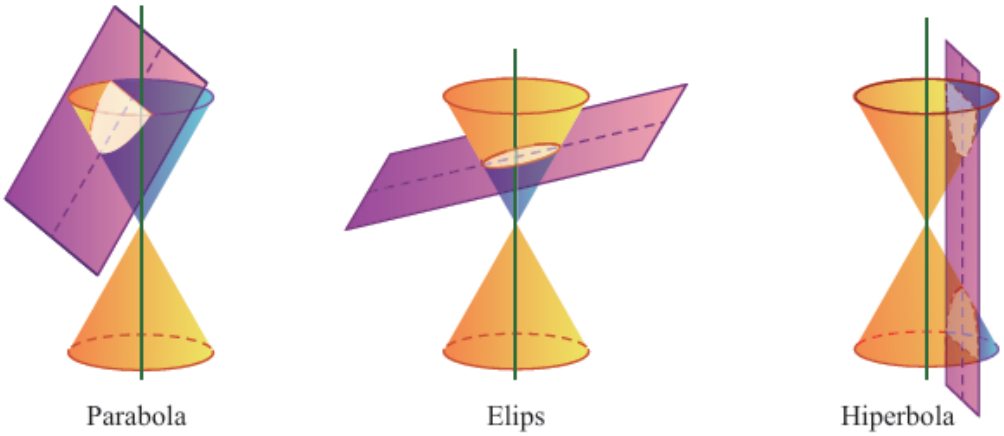
Jadi PGS Lingkarannya adalah .....

Tugas 3

1. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0$ di titik $(-3,6)$ adalah.
2. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang sejajar garis $3x + y + 6 = 0$ adalah.
3. Tentukan PGSL $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ yang ditarik dari titik $A(4, -4)$ diluar lingkaran

B. Irisan Kerucut: Parabola, Elips, Hiperbola dan Parabola

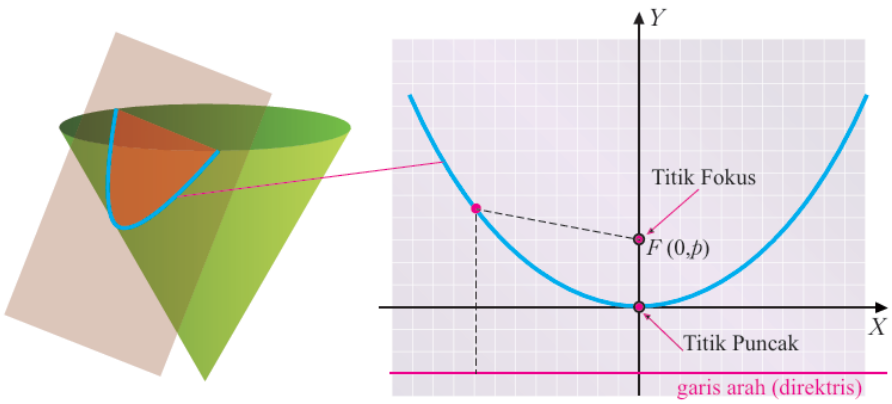
Tahukah kalian, bagian irisan kerucut banyak diterapkan dalam kehidupan sehari hari? Misalnya, sifat parabola dari sinar pantul yang sejajar sumbu simetri yang melewati titik fokus digunakan untuk kompor tenaga surya, reflektor lampu, radar, lampu hias, dan sebagainya. Jika dilihat dari orbit matahari pada bidang yang sama dengan planet, maka orbitnya berbentuk elips dengan matahari sebagai salah satu titik fokusnya. Seperti namanya, irisan kerucut dapat diperoleh dari sepasang kerucut yang puncaknya berimpitan dan dipotong oleh sebuah bidang datar dengan sudut tertentu. Terdapat beberapa kemungkinan bidang yang diperoleh dari irisan tersebut, yaitu elips, parabola, dan parabola (lihat Gambar 1.21)



1. Parabola

a. Definisi Parabola

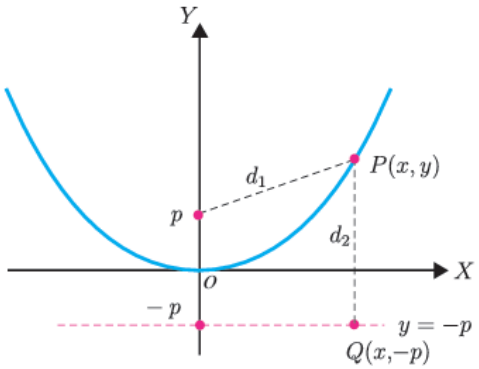
Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap titik tertentu selalu sama. Titik tertentu pada parabola disebut dengan titik fokus (f), sedangkan garis tertentu dinyatakan dengan garis direktris (d). Pada Gambar 1.22 bahwa titik fokusnya adalah titik $F(0, p)$ dengan persamaan garis direktriksnya adalah $y = -p$



b. Persamaan Parabola

Untuk menentukan persamaan suatu parabola, kalian harus mengetahui unsur unsur untuk menentukan persamaan parabola. Unsur tersebut di antaranya adalah sumbu simetri, puncak, fokus, dan persamaan garis direktris.

1. Persamaan parabola berpuncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu $Y\ (x\ =\ 0)$



Persamaan parabola yang berpusat di $O(0,0)$ dengan koordinat fokus $F(p,0)$ dan garis direktris $y\ =\ -p$ adalah $\boldsymbol{x^2 = 4yp}$

Bukti

$d_1 = d_2$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$

$\sqrt{x^2+(y-p)^2} = \sqrt{0^2+(y+p)^2}$

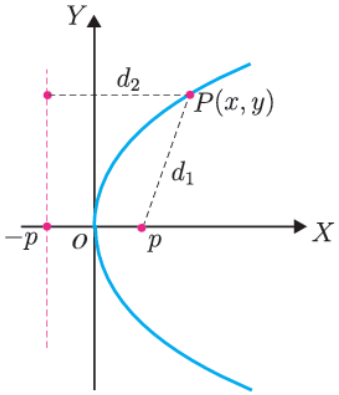
$\sqrt{x^2+y^2-2yp+p^2} = \sqrt{0+y^2+2yp+p^2}$

$x^2+y^2-2yp+p^2 = 0+y^2+2yp+p^2$

$x^2 = 2yp+2yp$

$\boldsymbol{x^2 = 4yp}$

2. Persamaan parabola berpuncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu $X(y\ =\ 0)$



Persamaan parabola yang berpusat di $O(0,0)$ dengan koordinat fokus $F(0,p)$ dan garis direktris $x\ =\ -p$ adalah $\boldsymbol{y^2 = 4xp}$

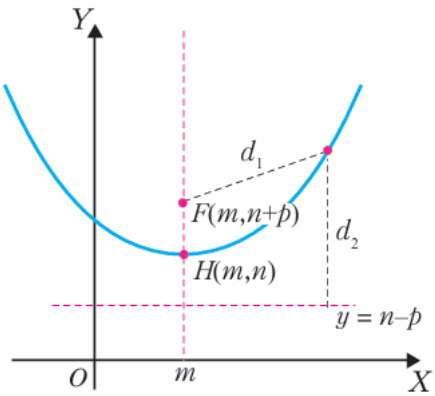
Bukti

$d_1 = d_2$

3. Persamaan parabola dengan puncak $H(m, n)$

Kasus 1

Perhatikanlah Gambar disamping, terlihat bahwa puncak berada di $H\ (m, n)$, sumbu simetri adalah $x\ =\ m$, persamaan direktriksnya adalah $y\ =\ n\ -\ p$, fokus pada $F\ (m, n + p)$. Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga

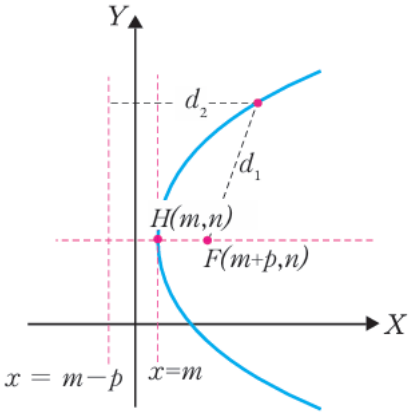


Persamaan parabolanya

$\boldsymbol{(x-m)^2\ =\ 4p(y-n)}$.

Kasus 2

Perhatikanlah Gambar disamping, terlihat bahwa puncak berada di $H\ (m, n)$, sumbu simetri adalah $y\ =\ m$, persamaan direktriksnya adalah $x\ =\ m\ -\ p$, fokus pada $F\ (m + p, n)$. Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga



Persamaan parabolanya

$\boldsymbol{(y-n)^2\ =\ 4p(x-m)}$.

Contoh soal

1. Tentukan persamaan parabola dengan $O(0,0)$ dan titik fokus $(3,0)$

   Jawab.

   Diketahui : Titik Puncak $O(0,0)$

   Titik Fokus $(3,0) = (p,0)\ maka\ p = 3$

   Distriks $x = -3$

   Sumbu simetri $y = 0$

   Persamaan parabola $\boldsymbol{y^2 = 4xp}$

   $$y^2 = 4(3)x$$
   $$y^2 = 12x$$

2. Tentukan persamaan parabola dengan titik fokus $F(4,0)$ dan direktriks $x = -4$

   Jawab

   Titik Fokus $F(4,0), maka\ p = 4$

   Direktriks $x = -4$

   Titik puncak $\left(\frac{-4+4}{2}, 0\right) = (0,0)$

   Sumbu simetri $y = 0$ sumbu X

   Persamaan parabola $\boldsymbol{y^2 = 4xp}$

   $$y^2 = 4(4)x$$
   $$y^2 = 16x$$

3. Jika sebuah parabola memiliki titik puncak (2,3) dan titik fokus (1,3), tentukan persamaan parabola tersebut!

   Penyelesaian

   Diketahui

   - Titik puncak parabola: (2,3)
   - Titik fokus parabola: (1,3)

   Langkah 1: Menentukan arah parabola

   Karena fokus dan puncak memiliki **ordinat (y)** yang sama, yaitu 3, maka parabola **mengarah secara horizontal**, bukan vertikal.

   Karena fokus berada di sebelah **kiri** puncak, maka **parabola membuka ke kiri**.

Langkah 2: Rumus umum parabola horizontal

Bentuk umum parabola horizontal $(\boldsymbol{y-n})^2 = \boldsymbol{4p(x-m)}$.

dengan:

- (m,n) adalah titik puncak
- p adalah jarak dari puncak ke fokus (positif jika ke kanan, negatif jika ke kiri)

Langkah 3: Subtitusikan nilai

$m = 2, n = 3$

Fokus di (1,3) berarti p=−1 (karena fokus 1 satuan ke kiri dari puncak)

$(y-3)^2 = 4(-1)(x-2)$

$(y-3)^2 = -4(x-2)$

$y^2 - 6y + 9 = -4x + 8$

$y^2 - 6y + 4x + 1 = 0$

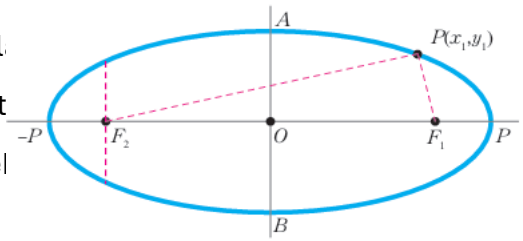
Soal Latihan

1. Tentukan persamaan parabola yang memiliki titik puncak di O(0,0) dan titik fokus di (-4, 0).
2. Tentukan persamaan parabola dengan titik puncak di O(0,0) dan titik fokus di (0, -2).
3. Sebuah parabola memiliki titik puncak di (0,−2) dan titik fokus di (0,0). Tentukan persamaan parabola tersebut!

2. Elips

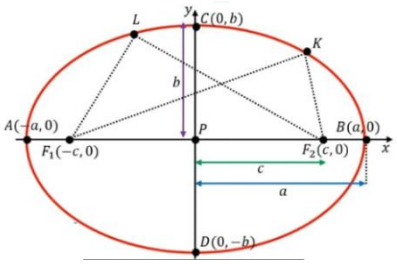
a. Definisi Elips

Elips adalah kumpulan titik titik dal
bidang datar yang jumlah jarak kedua t
tertentu selalu sama, kedua titik tersel
disebut dengan titik fokus.



b. Unsur-unsur Elips

Elips Horizontal



a = setengah panjang sumbu horizontal

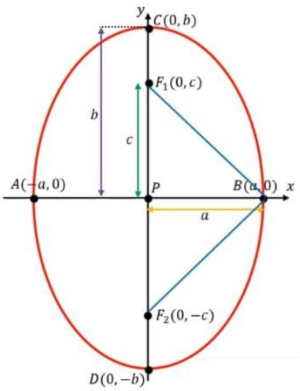
b = setengah panjang sumbu vertikal

c = jarak titik pusat ke titik fokus

Pada **elips horizontal** di samping

- a > b
- Sumbu horizontal = sumbu panjang = sumbu mayor
- Sumbu vertikal = sumbu pendek = sumbu minor
- $a^2 = b^2 + c^2$

Elips Vertikal



a = setengah panjang sumbu horizontal

b = setengah panjang sumbu vertikal

c = jarak titik pusat ke titik fokus

Pada **elips vertikal** di samping

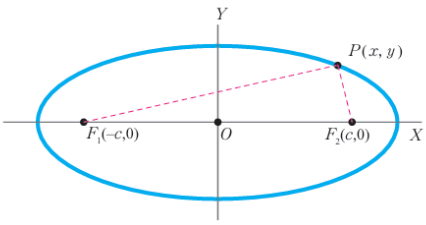
- a < b
- Sumbu horizontal = sumbu pendek = sumbu minor
- Sumbu vertikal = sumbu panjang = sumbu mayor
- $b^2 = a^2 + c^2$

c. Persamaan Elips

1) Persamaan Elips dengan Pusat O(0,0) dan Sumbu Mayornya adalah Sumbu X

Bentuk Persamaan Elips

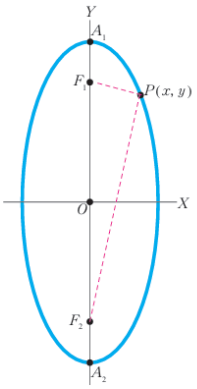
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



2) Persamaan Elips dengan Pusat O (0,0) dan Sumbu Mayornya adalah Sumbu Y

Bentuk Persamaan Elips

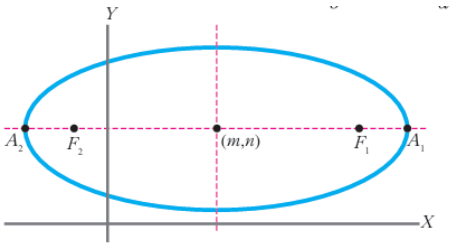
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



3) Persamaan Elips dengan Pusat P (m,n) dan Sumbu Mayornya Sejajar Sumbu X

Bentuk Persamaan Elips

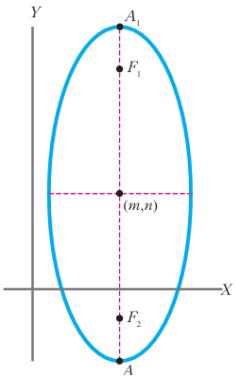
$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



4) Persamaan Elips dengan Pusat P (m,n) dan Sumbu Mayornya Sejajar Sumbu Y

Bentuk Persamaan Elips

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$



Contoh Soal

1. Tentukan persamaan elips yang berfokus di titik (-3,0) dan (3,0) dengan panjang sumbu minor 4.

   Penyelesaian:

   Dik. P (0,0)

   2b = 4

   b = 2

   c = 3

   $a^2 = b^2 + c^2$

   $= 2^3 + 3^2$

   $= 4 + 9$

   $a^2 = 13$

   Bentuk persamaan

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$

   Jadi persamaan elipsnya adalah

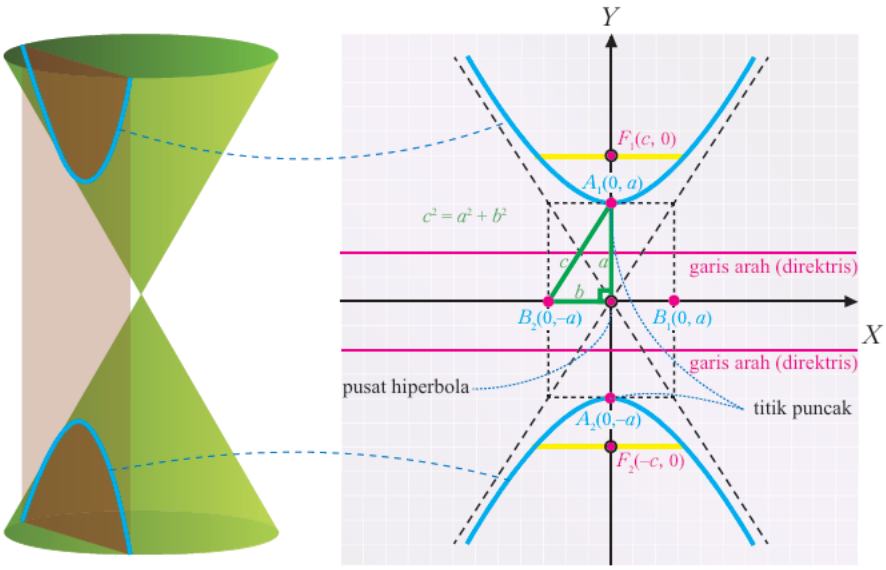
   $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$

2. Tentukan persamaan elips dengan pusat O (0,0), fokus (4,0) dan (–4,0) serta sumbu mayornya 12
3. Tentukan persamaan elips yang berpusat di titik (4,-1), salah satu fokusnya dititik (1,-1), dan melalui titik (8,0).

3. Hiperbola

a. Definisi Hiperbola

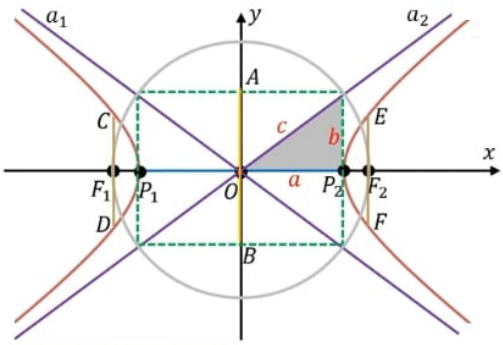
Hiperbola merupakan sebuah kurva yang dibentuk oleh perpotongan dua kerucut yang berlawanan dan bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut. Hiperbola merupakan tempat lintasan titik-titik dengan eksentrisitasnya lebih besar dari satu. Selain itu, ada definisi lain yang menyatakan bahwa hiperbola adalah himpunan titik-titik yang jarak antara dua titik tertentu pada bidang selalu sama. Kedua titik tersebut disebut dengan fokus hiperbola, selisih kedua titik ini bisa disebut dengan 2a.



b. Unsur-unsur Hiperbola

UNSUR-UNSUR HIPERBOLA HORIZONTAL

1. **Titik fokus**: F_1, F_2
2. **Titik puncak**: P_1, P_2
3. **Titik pusat**: O
4. **Sumbu utama atau sumbu transversal**: sumbu x
5. **Sumbu sekawan atau sumbu konjugasi**: sumbu y
6. **Asimtot**: garis a_1 dan a_2
7. **Sumbu nyata**: P_1P_2
8. **Sumbu imajiner**: AB
9. ***Latus rectum***: CD, EF

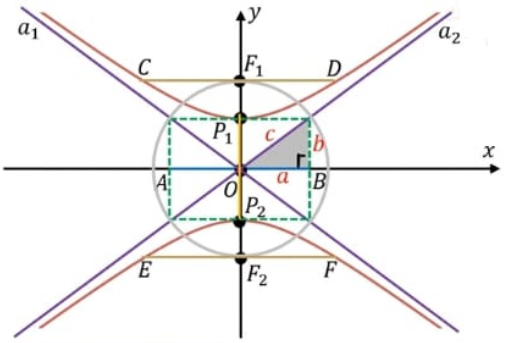


$c^2 = a^2 + b^2$

a = setengah panjang sumbu nyata
b = setengah panjang sumbu imajiner
c = jarak titik pusat ke titik fokus

UNSUR-UNSUR HIPERBOLA VERTIKAL

1. **Titik fokus**: F_1, F_2
2. **Titik puncak**: P_1, P_2
3. **Titik pusat**: O
4. **Sumbu utama atau sumbu transversal**: sumbu y
5. **Sumbu sekawan atau sumbu konjugasi**: sumbu x
6. **Asimtot**: garis a_1 dan a_2
7. **Sumbu nyata**: P_1P_2
8. **Sumbu imajiner**: AB
9. ***Latus rectum***: CD, EF



$c^2 = a^2 + b^2$

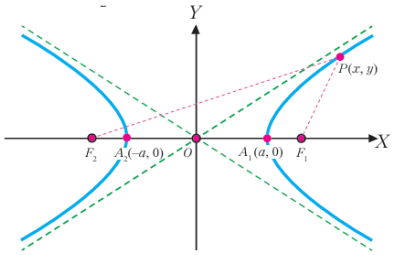
a = setengah panjang sumbu imajiner
b = setengah panjang sumbu nyata
c = jarak titik pusat ke titik fokus

c. Persamaan Hiperbola

1. Persamaan Hiperbola dengan Pusat O (0,0) dan Fokusnya Terletak di Sumbu X

   Bentuk Persamaan Hiperbola

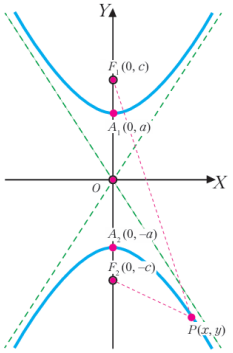
   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



2. Persamaan Hiperbola dengan Pusat O (0,0) dan Fokusnya Terletak di Sumbu Y

   Bentuk Persamaan Hiperbola

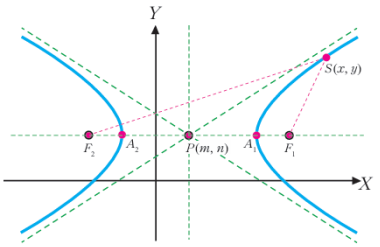
   $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



3. Persamaan Hiperbola dengan Pusat P (m,n) dan Sumbu Utama Sejajar Sumbu X

   Bentuk Persamaan Hiperbola

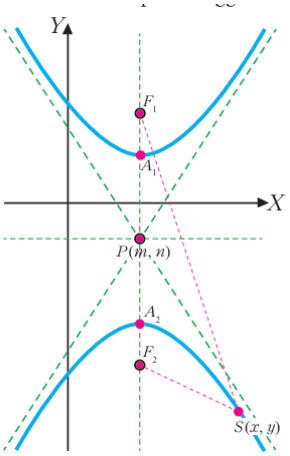
   $$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



4. Persamaan Hiperbola dengan Pusat P (m,n) dan Sumbu Utama Sejajar Sumbu Y

Bentuk Persamaan Hiperbola

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$



Contoh Soal :

1. Tentukan persamaan hiperbola dengan pusat di titik (0,0), salah satu puncak di titik (3,0) dan salah satu fokusnya di titik (5,0) adalah.

   Penyelesaian:

   Diketahui $a = 3$

   $c = 5$

   $c^2 = a^2 + b^2$

   $5^2 = 3^2 + b^2$

   $25 = 9 + b^2$

   $b^2 = 16$

   Persamaan Hiperbola

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

   Jadi persamaan hiperbolanya adalah

   $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2. Diketahui titik pusat O (0,0), salah satu puncak di titik (0,-2) dan salah satu fokusnya di titik (0,-4) Tentukan persamaan hiperbola tersebut.!
3. Tentukan persamaan hiperbola dengan pusat di titik P(2,5), salah satu puncak di titik (2,7) dan salah satu fokusnya di titik (2,0) adalah.